PEMODELAN BIVARIATE POLINOMIAL LOKAL PADA JUMLAH KEMATIAN IBU DAN BAYI DI JAWA TENGAH

Alan Prahutama, Suparti, Dwi Ispriyanti, dan Tiani Wahyu Utami
Departemen Statistika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang, Indonesia

Email: alan.prahutama@gmail.com

Abstrak. Analisis regresi merupakan analisis dalam metode statistika untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Analisis regresi dapat dilakukan secara parametrik dan nonparametrik. Analisis regresi nonparametrik dilakukan apabila bentuk kurva regresinya tidak diketahui. Salah satu metode dalam analisis regresi nonparametrik adalah polinomial lokal. Polinomial lokal dilakukan berdasarkan pembobotan kernel, sehingga membutuhkan bandwidth. Pemilihan bandwidth optimal menggunakan *Generalized Cross Validation* (GCV). Pada penelitian ini dikembangkan model regresi bivariate polinomial lokal pada kasus pemodelan jumlah kematian ibu dan bayi di Jawa Tengah. Variabel prediktor yang digunakan adalah jumlah tenaga kesehatan. Nilai bandwidth optimla yang didapatkan adalah 1. Nilai MSE yang dihasilkan dari model jumlah kematian ibu adalah 1.017741 dan Nilai MSE yang dihasilkan dari model jumlah kematian bayi adalah 1.380833.

Keywords: Bivariate, Polinomial Lokal, Jumlah kematian ibu, Jumlah kematian bayi.

1. Pendahuluan

Analisis regresi merupakan analisis dalam metode statistika untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor. Pendekatan regresi dapat dilakukan secara parametrik dan nonparametrik. Pendekatan nonparametrik dilakukan apabila bentuk kurva fungsinya tidak diketahui, sedangkan pendekatan parametrik dilakukan apabila bentuk kurva fungsinya diketahui. Pendekatan parametrik merupakan pendekatan yang sederhana mudah dilakukan, hal ini seperti pemodelan regresi linier sederhana maupun berganda, akan tetapi metode ini sangat ketat dengan asumsi. Berbeda dengan pendekatan parametrik, pendekatan nonparametrik lebih kompleks didalam pemodelan. Akan tetapi pendekatan nonparametrik tidak membutuhkan asumsi. Beberapa pendekatan nonparametrik antara lain Kernel, Spline truncated, Wavelet, Polinomial Lokal, deret Fourier. Polinomial lokal merupakan salah satu metode dalam pemodelan regresi nonparametrik dengan menggunakan deret Taylor yang diboboti dengan menggunakan kernel. Polinomial lokal mampu memodelkan data yang bersifat acak. Karena digunakan fungsi kernel sebagai pembobotannya, maka ditentukan bandwidth optimum dengan menggunakan metode pemilihan bandwidth. Metode pemilihan bandwidth dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa metode antara lain Mean Square Error (MSE), Cross Validation (CV), Generalized Cross Validation (GCV), Unbias Risk (UBR). Penentuan bandwidth dapat mengakibatkan oversmoothing ataupun undersmoothing didalam pemodelannya. Oleh karena itu diperlukan penentuan bandwidth yang optimum.

Polinomial lokal dapat dikembangkan dengan dua buah variabel respon atau secara bivariate didalam pemodelannya. Pemodelan bivariate dilakukan apabila kedua buah variabel respon tersebut mempunyai keterikatan satu dengan yang lainnya. Keterikatan tersebut ditandai dengan terdapatnya korelasi antar kedua buah variabel tersebut. Pada penelitian ini akan dikembangkan pemodelan regresi nonparametrik polinomial lokal bivariate. Kasus yang akan digunakan adalah pemodelan jumlah kematian ibu dan bayi di Jawa Tengah sebagai variabel respon, dengan variabel prediktonya adalah jumlah tenaga medis.

2. Landasan Teori

2.1. Regresi Nonparametrik

Persamaan model regresi dapat dituliskan sebagai berikut (Eubank, 1988):

$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

Jika ditulis dalam bentuk matriks diperoleh model regresi:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Pada pendekatan regresi nonparametrik dimana bentuk kurvanya tidak diketahui, fungsi regresi diasumsikan termuat dalam suatu ruang fungsi (Eubank, 1988). Model regresi nonparametrik berbentuk:

$$y_i = \eta(t_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \ldots, l$$

dengan y_i adalah variabel respon. Fungsi η yang tidak diketahui bentuknya dengan t_i sebagai variabel prediktor dan ε_i diasumsikan berdistribusi $N(0, \sigma^2)$ dan kurva η diasumsikan *smooth* (mulus) dan berada pada suatu ruang tertentu.

2.2. Fungsi Kernel

Salah satu metode estimasi pada Polinomial Lokal adalah menggunakan WLS (*Weighted Least Square*) sehingga diperlukan pembobotan. Salah satu pembobotan yang digunakan untuk mendapatkan estimasi adalah Fungsi Kernel (Eubank, 1988). Fungsi Kernel *K* dengan *bandwidth h* didefinisikan sebagai berikut:

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right) \; ; \; -\infty < x < \infty \text{ dan } h > 0.$$

sedangkan menurut Hardle (1990) terdapat beberapa jenis fungsi Kernel

Tabel 1. Fungsi Kernel

1. Kernel Uniform: $K(x) = \frac{1}{2};\ I(\lvert x\rvert < 1)$	2. Kernel Twiweight: $K(x) = \frac{35}{32}(1-x^2)^3;\ I(\lvert x\rvert < 1)$
3. Kernel Segitga: $K(x) = (1-\lvert x\rvert);\ I(\lvert x\rvert < 1)$	4. Kernel Cosinus: $K(x) = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right);\ I(\lvert x\rvert < 1)$
5. Kernel Eparichnikov: $K(x) = \frac{3}{4}(1-x^2);\ I(\lvert x\rvert < 1)$	6. Kernel Gaussian: $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2}(-x^2)\right)$

7. Kernel Kuadrat: $K(x)=\frac{15}{16}\left(1-x^2\right)^2;\ I\left(\lvert x\rvert<1\right)$

2.3. Model Regresi Polinomial Lokal

Diberikan $\eta(t_i)$ merupakan kurva yang tidak diketahui bentuknya sehingga dilakukan estimasi nonparametrik. Salah satu pendekatan untuk mengestimasi $\eta(t_i)$ adalah dengan metode Polinomial Lokal. Estimator Polinomial Lokal diperoleh dengan deret Taylor yang memuat polinomial berderajat *p*. Jika $\eta(t_i)$ dideretkan menurut deret Taylor dengan polinomial derajat *p* maka didapat

$$\eta(t_i)\approx\eta(t)+(t_i-t)\eta^{(1)}(t)+\cdots+(t_i-t)^p\,\eta^{(p)}(t)/p! \tag{1}$$

Dengan $t_i\in[t-h,t+h]$.

Jika dimisalkan $\beta_r(t)=\frac{\eta^{(r)}(t)}{r!}$ dengan $r=0,1,2,...,p$ maka persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$\eta(t_i)\approx\beta_0(t)+(t_i-t)\beta_1(t)+\cdots+(t_i-t)^p\,\beta_p(t)\ . \tag{2}$$

Persamaan 2 dapat ditulis sebagai berikut:

$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{t}_i)\approx\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}$ dengan

$$\mathbf{x}_i=\begin{bmatrix}1 & (t_i-t) & (t_i-t)^2 & \cdots & (t_i-t)^p\end{bmatrix}^T$$ dan

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0(t) & \beta_1(t) & \beta_2(t) & \cdots & \beta_p(t)\end{bmatrix}^T$$

Untuk mendapatkan estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dilakukan dengan meminimumkan kriteria *Weighted Least Square* (WLS) sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2K_h(t_i-t)\ . \tag{3}$$

$K_h(\cdot) = \frac{K(\cdot / h)}{h}$ dengan *K* merupakan fungsi kernel dan *h* adalah sebuah *bandwidth* , sehingga kriteria WLS dapat ditulis sebagai berikut:

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X\beta})^{\mathbf{T}} \mathbf{K_h} (\mathbf{y} - \mathbf{X\beta}) \tag{4}$$

dimana $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$; $\mathbf{K_h} = diag(K_h(t_1 - t), \ldots, K_h(t_n - t))$ sehingga didapat estimasi untuk $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ diberikan oleh:

$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X^T K_h X})^{-1} \mathbf{X^T K_h y}$ (Wu dan Zhang, 2005).

2.4. Pemilihan Bandwidth Optimal

Bandwidth adalah sebagai pengontrol antara fungsi dengan data agar fungsi yang dihasilkan menjadi *smooth* (mulus). Pemilihan *bandwidth* yang optimal akan menghasilkan estimator yang baik terhadap model. Pemilihan *bandwidth* yang terlalu kecil akan menghasilkan kurva estimasi yang sangat kasar (*undersmoothing*). Sementara jika pemilihan *bandwidth* terlalu besar akan menghasilkan kurva fungsi estimasi yang sangat *smooth (oversmoothing)*. Oleh karena itu pemilihan *bandwidth* yang optimal sangat penting dalam analisis regresi nonparametrik (Budiantara, 2000). Salah satu cara menentukan *bandwidth* yang optimal dengan menggunakan metode GCV (*Generalized Cross Validation)*. Fungsi GCV diberikan sebagai berikut:

$$GCV(h) = \frac{MSE(h)}{\left(\frac{1}{n} tr[\mathbf{I} - \mathbf{A}(h)]\right)^2}$$

dengan

$MSE(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$, dan $\mathbf{A}(h)$ diperoleh dari hubungan $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(h)\mathbf{y}$.

Nilai GCV terkecil akan memberikan nilai *bandwidth h* yang optimal.

Menurut Welsh dan Yee (2005) pemilihan *bandwidth* birespon pada dasarnya dilakukan secara bersama-sama untuk mendapatkan *bandwidth* yang optimal. Akan tetapi dalam aplikasinya sangat sulit. Oleh karena itu penelitian Welsh dan Yee (2005) penentuan *bandwidth* dilakukan secara terpisah untuk masing-masing respon.

3. Metodologi Penelitian

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah jumlah kematian ibu dan jumlah kematian bayi di Jawa Tengah pada tahun 2016. Data yang diambil berupa data tiap kabupaten/kota di Jawa Tengah sehingga terdapat 35 pengamatan. Variabel prediktor yang digunakan dalam penelitian ini adalah jumlah tenaga kesehatan. Langkah pertama dalam memodelkan regresi polinomial lokal adalah menguji apakah terdapat korelasi antar variabel respon. Langkah selanjutnya adalah menentukan bandwdith untuk masing-masing variabel respon terhadap variabel prediktor. Penentuan bandwidth optimum menggunakan metode GCV. Setelah didapatkan bandwidth optimum, langkah selanjutnya adalah pemodelan jumlah kematian ibu dan jumlah kematian bayi di Jawa Tengah berdasarkan jumlah tenaga kesehatan. Pada penelitian ini fungsi kernel yang digunakan adalah kernel Gaussian.

4. Hasil dan Pembahasan

Misalnya diberikan data (t_j, y_{1j}, y_{2j}) serta hubungan (t_j, y_{1j}) dan (t_j, y_{2j}) mengikuti model regresi nonparametrik.

$y_{1j} = f(t_{1j}) + \varepsilon_{1j}$

$y_{2j} = f(t_{2j}) + \varepsilon_{2j}$ dengan $j = 1, 2, \ldots, m$.

Apabila $f_1(t_{1j})$ dan $f_2(t_{2j})$ didekati dengan Polinomial Lokal $\eta_i(t_{ij})$ maka didapat $f_i(t_{ij}) = \eta_i(t_{ij})$; $i = 1,2$ dengan $\eta_i(t_{ij}) \approx \eta_i(t) + (t_{ij} - t)\eta_i^{(1)}(t) + \cdots + (t_{ij} - t)^p \eta_i^{(p)}(t) / p!$ (Wels dan Yee, 2005).

atau bisa ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \cdots \\ \mathbf{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f_1(t)} \\ \cdots \\ \mathbf{f_2(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

Jika dijabarkan kedalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t_{11}) \\ f_1(t_{12}) \\ \vdots \\ f_1(t_{1n}) \\ f_1(t_{21}) \\ f_1(t_{22}) \\ \vdots \\ f_1(t_{2n}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n} \end{bmatrix};$$

Dimana $\mathbf{f_1(t)}$ dan $\mathbf{f_2(t)}$ diasumsikan kurva regresinya tidak diketahui bentuknya. Misalkan diberikan polinomial $\eta(u_{ij})$ derajat *p* sebagai berikut:

$$\eta(u_{ij}) = \eta(u) + (u_{ij} - u)\eta^{(1)}(u) + (u_{ij} - u)^2 \frac{\eta^{(2)}(u)}{2!} + \ldots + (u_{ij} - u)^p \frac{\eta^{(p)}(u)}{p!} \qquad (6)$$

Jka didalam model birespon data longitudinal, kurva regresi $f_i(t_{ij})$ didekati dengan polinomial lokal derajat *p* maka:

$$f_i(t_{ij}) = f_i(t) + (t_{ij} - t) f_i^{(1)}(t) + (t_{ij} - t)^2 \frac{f_i^{(2)}(t)}{2!} + \ldots + (t_{ij} - t)^p \frac{f_i^{(p)}(t)}{p!} \qquad (7)$$

Jika $\alpha_{ir} = \dfrac{f_i^{(r)}(t)}{r!}$ dengan $r = 0,1,2,\ldots,p$ maka persamaan (6) dapat ditulis menjadi:

$$f_i(t_{ij}) = \alpha_{i0} + (t_{ij} - t)\alpha_{i1} + (t_{ij} - t)^2 \alpha_{i2} + \ldots + (t_{ij} - t)^p \alpha_{ip}. \qquad (8)$$

Jika ditulis dalam bentuk matriks diperoleh model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{9}$$

dengan

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ --- \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} + (t_{11} - t)\alpha_{11} + (t_{11} - t)^2 \alpha_{12} + \cdots + (t_{11} - t)^p \alpha_{1p} \\ \alpha_{10} + (t_{12} - t)\alpha_{11} + (t_{12} - t)^2 \alpha_{12} + \cdots + (t_{12} - t)^p \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{10} + (t_{1n} - t)\alpha_{11} + (t_{1n} - t)^2 \alpha_{12} + \cdots + (t_{1n} - t)^p \alpha_{1p} \\ ------------------------------ \\ \alpha_{20} + (t_{21} - t)\alpha_{21} + (t_{21} - t)^2 \alpha_{22} + \cdots + (t_{21} - t)^p \alpha_{2p} \\ \alpha_{20} + (t_{22} - t)\alpha_{21} + (t_{22} - t)^2 \alpha_{22} + \cdots + (t_{22} - t)^p \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{20} + (t_{2n} - t)\alpha_{12} + (t_{2n} - t)^2 \alpha_{22} + \cdots + (t_{2n} - t)^p \alpha_{2p} \end{bmatrix}$$

Persamaan (9) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Matriks pembobot yang digunakan adalah banyaknya pengamatan $(\mathbf{W}^*)$ $\mathbf{W}^* = diag\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right]$ dan

Diberikan $\mathbf{K_h}$ merupakan matriks pembobot kernel. Jika

$\boldsymbol{\delta} = diag(K_h(t_{11} - t), K_h(t_{12} - t), \ldots, K_h(t_{1n} - t))$;

$\boldsymbol{\omega} = diag(K_h(t_{21} - t), K_h(t_{22} - t), \ldots, K_h(t_{2n} - t))$;

maka matriks pembobot kernel $\mathbf{K_h}$ adalah sebagai berikut:

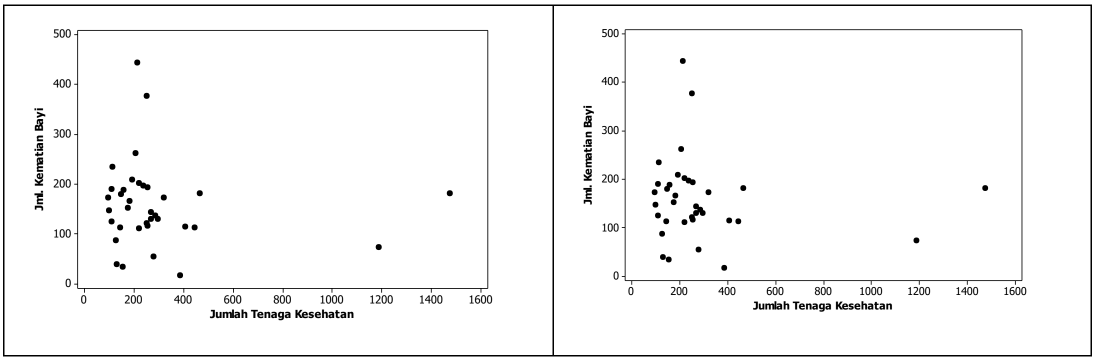
$$\mathbf{K_h} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}.$$

Apabila diberikan matriks **W** yang merupakan matriks pembobot, $\mathbf{K_h}$ merupakan matriks pembobot kernel, maka untuk memperoleh estimator

$\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ dilakukan optimasi *Weighted Least Square* (WLS). Jika $\psi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ merupakan fungsi WLS maka

$$\psi(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^{\mathbf{T}} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{h}} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.11)$$

Berikut disajikan scatterplot dari data penelitian



Gambar 1. Scatterplot Jumlah Kematian Ibu dan Jumlah Kematian Bayi terhadap jumlah tenaga kesehatan

Berdasarkan Gambar 1, terlihat bahwa plot menyebar secara acak. Selain itu terlihat pola jumlah kematian ibu dan jumlah kematian bayi terhadap jumlah tenaga kesehatan, plotnya sangat mirip. Karena bentuk kurva regresinya acak, kita tidak bisa langsung memutuskan untuk dimodelkan secara linier. Sehingga dengan kurva yang acak (tidak diketahui polanya) maka bisa dilakukan pemodelan secara nonparametrik. Berikut disajikan statistika deskriptif dari data penelitian.

Tabel 2. Statistika Deskriptif data penelitian

Variable	**Minimum**	**Maximum**	**Mean**	**Variance**
Jumlah Kematian Bayi (Y_1)	16	444	156.7	7221.2
Jumlah Kematian Ibu (Y_2)	0	54	17.2	114.99
Jumlah tenaga kesehatan (X)	97	1474	290.7	77964

Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa jumlah kematian bayi tertinggi mencapai 444 jiwa yaitu di kabupaten Brebes. Sedangkan terendeah mecapai 16 jiwa yaitu di kota Magelang dengan rata-rata angka kematian bayi di Jawa Tengah mencapai 156 jiwa. Sedangkan jumlah kematian ibu terendah mencapai 0 jiwa yaitu di kota Magelang, tertinggi mencapai 54 jiwa yaitu di kabupaten Brebes. Rata-rata jumlah kematian ibu mencapai 17 jiwa. Untuk variabel jumlah tenaga kesehatan, rata-ratanya berkisar 290.7

Berdasarkan hasil analisis nilai korelasi antara jumlah kematian ibu dan bayi mecapai 0.822 (signifikan dengan alfa 5%), artinya bisa dikatakan bahwa kedua variabel tersebut mempunyai keterkaitan yang tinggi. Sehingga variabel Y_1 dan Y_2 dapat dimodelkan secara bivariate. Langkah selanjutnya adalah penentuan bandwidth optimum menggunakan metode GCV dengan fungsi kernel Gaussian.

Bandwidth optimum yang didapat bernilai 1 dengan nilai orde adalah 1, nilai GCV optimum yang didapat adalah 1.179425 dengan nilai arbited fixed point adalah -0.1386513 untuk Y_1, sedangkan untuk Y_2 nilai bandwidth optimum sama dengan Y_1 akan tetapi nilai GCV optimumnya adalah 1.206186. Berikut hasil pemodelan polinomial lokal yang didapat sebagai berikut:

Pemodelan jumlah kematian ibu dimodelkan sebagai berikut:

$$y_{1i} = -0.0400630 - 0.3336435(t_{1i} + 0.1386513) + \varepsilon_{1i}$$

Nilai MSE yang dihasilkan dari model jumlah kematian ibu adalah 1.017741

$$y_{2i} = -0.14444 - 0.4622479(t_{2i} - 1.206186) + \varepsilon_{2i}$$

Nilai MSE yang dihasilkan dari model jumlah kematian bayi adalah 1.380833

5. Kesimpulan

Estimasi parameter model polinomial lokal bivariate didapatkan sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{h}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{K}_{\mathbf{h}}\mathbf{y}$$

Estimator polinomial lokal bivarite mengandung nilai pembobotan dari variabel repon dan dari kernel. Pada pemodelan jumlah kematian ibu dan jumlah kematian bayi model yang didapatkan sebagai berikut:

Pemodelan jumlah kematian ibu dimodelkan sebagai berikut:

$$y_{1i} = -0.0400630 - 0.3336435\left(t_{1i} + 0.1386513\right) + \varepsilon_{1i}$$

Nilai MSE yang dihasilkan dari model jumlah kematian ibu adalah 1.017741

$$y_{2i} = -0.14444 - 0.4622479\left(t_{2i} - 1.206186\right) + \varepsilon_{2i}$$

Nilai MSE yang dihasilkan dari model jumlah kematian bayi adalah 1.380833

6. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada universitas Diponegoro atas dukungan penelitian Riset Pengembangan dan Penerapan (RPP) tahun 2018.

Daftar Pustaka

Bellhouse, D.R., dan Stafford, J.E. (2001), “Local Polynomial regression in Complex Surveys”, *Statistics Canada, Catalouge: Survey Methodology*, Vol. 27, No. 2, hal. 197-203.

Budiantara, I.N. (2000), “Metode U, GML, CV, dan GCV dalam regresi Nonparametrik Spline”, *Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia (MIHMI)*, Vol. 6, hal. 285-290.

Chamidah, N. (2008), “Inferensi Kurva Regresi Nonparametrik Berdasarkan Estimator Polinomial Lokal Dengan Error Lognormal”, *J. Penelit. Med. Eksakta*, Vol. 7, No. 1, hal. 61-69.

Drapper, N.R dan Smith, H. (1992), *Applied Regression Analysis 2nd Edition*. John Wiley & Sons Chapman and Hall, New York.

Eubank, R.L. (1988), *Spline Smoothing and Nonparametric Regression,* Marcel Dekker, New York.

Hardle, W. (1990), *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, New York.

Welsh, A.H dan Yee, T.Y. (2005), “Local Regression for Vector Responses”, *Journal of Statistical Planning and Inference,* Vol. 136, hal. 3007-3031.

Wu, H. dan Zhang, J.T. (2006), *Nonparametric Regression Methods for Longitudinal Data Analysis*, A John-Wiley and Sons Inc. Publication, New Jersey.