

Modifikasi Frekuensi Pribadi Poros Akibat Lenturan dengan Menggunakan Metode Elemen Hingga

Ady Rukma

Teknik Mesin Universitas Negeri Makassar

Jl. Dg. Tata Raya, Kampus UNM Parangtambung Makassar 90224

Abstrak

Salah satu sifat dinamika struktur yang penting adalah nilai frekuensi pribadi struktur. Walaupun nilai frekuensi pribadi tidak dapat digunakan sebagai data awal untuk perancangan struktur tetapi nilai frekuensi pribadi struktur akan menjadi akibat dari struktur yang dihasilkan misalnya dapat terjadi resonansi akibat frekuensi pribadi struktur sama dengan frekuensi kerja. Struktur sehingga terjadi suatu efek getaran yang sangat hebat dan dapat merusak struktur. Getaran selalu dikaitkan dengan osilasi mekanis sehingga getaran terkadang disebut sebagai getaran mekanis. Supaya getaran mekanis terjadi dibutuhkan minimal dua elemen pengumpul energi. Yang pertama adalah massa yang menyimpan energi kinetik dan yang kedua adalah alat elastik seperti pegas yang menyimpan energi potensial. Poros adalah sebuah struktur yang dapat dimasukkan kedalam sistem getaran dimana bila poros berputar, gaya sentrifugal yang terjadi akan mengakibatkan penyimpangan dengan keadaan seperti itu poros akan bergetar, untuk menghindari kemungkinan resonansi dapat dilakukan dengan pengubahan beberapa dimensi poros (diameter atau panjangnya) sepanjang tidak menghilangkan efek kekuatan dan ketahanannya. Penelitian ini memuat cara untuk memodifikasi frekuensi pribadi poros dengan optimasi pemodelan elemen hingga.

1. Pendahuluan

Kemajuan teknologi di bidang rancang bangun struktur ataupun elemen mesin dewasa ini mengakibatkan usaha untuk merancang struktur atau elemen mesin sudah sampai pada pemanfaatan batas kritis kekuatan bahan sehingga kemungkinan untuk terjadinya kerusakan atau kesalahan juga semakin besar untuk itulah berbagai aspek yang dapat mempengaruhi hasil rancangan, misalnya kemungkinan terjadinya resonansi (efek getaran yang berlebihan) harus menjadi perhatian.

Pada perancangan sangat diperlukan adanya konsep dari masalah pada tingkat analisis getaran. Pada tingkat pertama kita harus mampu mengenali kemungkinan terjadinya getaran. Tingkat ini selalu melibatkan mesin, struktur atau alat lain yang masih dalam bentuk rancangan. Masalah yang dihadapi adalah

menganalisis aspek-aspek getaran apa yang patut diperhatikan, yang mungkin timbul, dari apa yang sedang kita rancang. Hal ini boleh jadi membutuhkan penyelesaian yang sempurna, yaitu berupa harga-harga frekuensi, amplitudo, kecepatan, dan percepatan, gaya yang dipindahkan, resonansi dan sebagainya. Akan tetapi kadang-kadang untuk mengevaluasi aspek getaran struktur yang di rancang hanya dibutuhkan data frekuensinya.

2. Getaran pada Poros

Sistem gerakan yang bekerja karena adanya gaya yang terus menerus disebut gerakan getaran paksa dan bila tidak ada gaya yang bekerja gerakan disebut gerakan getaran bebas.

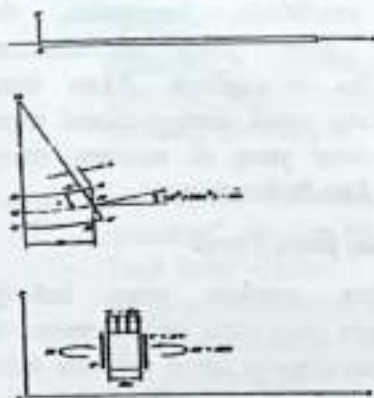
Untuk menetapkan konfigurasi suatu sistem getaran dibutuhkan koordinat-koordinat yang tidak berkaitan. Jumlah koordinat ini menunjukkan jumlah dan

derajat kebebasan sistem ini. Sistem yang hanya membutuhkan satu koordinat untuk arah gerakannya disebut sistem satu derajat kebebasan.

Pada benda elastik, massa dan kekakuan terdistribusi secara kontinu. Sebagai contoh benda elastik adalah kabel yang teregang, poros atau batang dengan derajat kebebasan puntir (rod), batang dengan derajat kebebasan lateral (beam). Dalam menganalisis benda-benda ini materialnya dianggap homogen, isotropik, dan memenuhi Hukum Hooke.

Sistem dengan distribusi massa yang kontinu seperti poros atau batang akan mempunyai jumlah derajat kebebasan yang banyak. Ini berarti juga system mempunyai sejumlah elemen massa elastik yang sama banyaknya.

Untuk sistem dengan derajat kebebasan yang banyak, dalam beberapa hal, gerakan-gerakan antara koordinatnya dapat harmonis. Bentuk gerakan ini disebut mode utama pada getaran. Tinjauan pada suatu batang silinder langsing (poros) yang bebas bergetar secara lateral karena jumlah elemen massanya tak berhingga, maka derajat kebebasan sistem terdistribusi ini adalah tak berhingga.



Batang dapat mengalami getaran transversal atau lenturan. Karena elemen ini umum dijumpai pada banyak struktur, maka pengkajian getaran jenis ini lebih penting. Untuk batang dengan penampang

sembarang yang mengalami getaran transversal atau lenturan seperti pada gambar, x adalah koordinat sepanjang sumbu netral batang dan y merupakan ukuran perpindahan atau defleksi lateral batang. Perhatikan untuk gerakan transversal, $y = y(x,t)$.

x adalah koordinat sepanjang sumbu netral batang dan y merupakan ukuran perpindahan atau defleksi lateral batang. Untuk gerakan transversal $y = y(x,t)$, perhatikan pada gambar bagian kecil batang elastis yang dianggap dikenai beban statis. Titik G-N adalah bidang netral. Penampang batang akan mengalami perputaran bidang, namun demikian penampang C-D telah diputar ke posisi awalnya sehingga semua perputaran ditunjukkan oleh irisan A-B, yang telah berputar ke posisi A'-B', perubahan kemiringan bidang netral adalah $(d^2y/dx^2) \cdot dx$. Di sini, semua kemiringan dan sudut rotasi dianggap kecil. Regangan total pada serat terluar adalah A-A', yang terjadi pada jarak $e = A'-N$ dari bidang netral. Dengan demikian dari kesamaan sudut

$$\frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{\delta}{c}$$

$$\text{sehingga : } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\delta}{c \cdot dx} = \frac{\epsilon}{c}$$

dimana ϵ adalah regangan satuan pada serat terluar. Dari hukum Hooke dan hubungan tegangan-lenturan, untuk kondisi elastik.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sigma}{E} = \frac{M \cdot c / I}{E \cdot c} = \frac{M}{EI}$$

dengan demikian :

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

dengan beberapa penyesuaian matematik diperoleh persamaan :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + b^2T = 0$$

Jawaban persamaan diatas dapat dituliskan sebagai

$$T = C_1 \sin \omega \cdot t + C_2 \cos \omega \cdot t$$

dimana $\omega = b^2$

dari persamaan $y = X.T$ dimana $X = X(x)$

dan $T = T(t)$

diperoleh :

$$X = A \left(\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} \right) + B \left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2} \right) + C \left[-i \left(\frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2} \right) \right] + D \left(\frac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} \right)$$

atau :

$$X = A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x + C \sin \lambda x + D \cos \lambda x$$

Dimana :

$$\lambda^2 = \omega \cdot a^2 = \omega \sqrt{\frac{\gamma}{EI}}$$

dengan demikian jawaban persamaan parsial dari persamaan

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

dimana $a^4 = \gamma / EI$ adalah :

$$y = (A \sinh \lambda x + B \cosh \lambda x + C \sin \lambda x + D \cos \lambda x) (C_1 \sin \omega \cdot t + C_2 \cos \omega \cdot t) \dots (*)$$

konstanta A, B, C, dan D ditentukan dari kondisi batas yang ada pada batang, dan C_1 serta C_2 dapat dicapai dari kondisi awal gerakan. Ujung-ujung batang dapat tetap atau bebas, jika suatu ujung tetap dan ujung lainnya bebas kondisi batas dapat dinyatakan sebagai :

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{untuk } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M &= 0 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ V &= 0 = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \end{aligned} \right\} \text{untuk } x = l$$

ini berlaku untuk semua nilai t. dua kondisi yang pertama ($x=0$) memberikan

$$C = -A$$

$$D = -B$$

Kedua kondisi diatas disubstitusi ke persamaan (*), diperoleh :

$$A (\cosh \lambda l + \cos \lambda l) +$$

$$B (\sinh \lambda l + \sin \lambda l) = 0$$

$$A (\sinh \lambda l + \sin \lambda l) +$$

$$B (\cosh \lambda l + \cos \lambda l) = 0$$

Ini merupakan masalah nilai karakteristik. Determinan A dan B harus nol, dan kondisi ini menghasilkan karakteristik dengan sejumlah tak terhingga akar yang menspesifikasikan angka karakteristik atau nilai frekuensi. Dengan membuat nilai determinan menjadi nol dan mengekspansikan hasilnya didapat :

$$(\cosh \lambda l + \cos \lambda l) = 0$$

karena $\cosh \lambda l$ merupakan eksponen yang meningkat dan $\cos \lambda$ berbentuk siklik, maka akan ada sejumlah tak terhingga nilai l yang memenuhi persamaan ini. Beberapa akar pertama dari persamaan diatas yang berurutan adalah :

$$\lambda_1 = \pi/2 = 1,571$$

$$\lambda_2 = 3\pi/2 = 4,714$$

$$\lambda_3 = 5\pi/2 = 7,854$$

$$\lambda_4 = 7\pi/2 = 10,996$$

$$\lambda_5 = 9\pi/2 = 14,137$$

... dst

nilai-nilai ini dapat dimasukkan pada persamaan

$$\lambda^2 = \omega_1 \cdot a^2$$

sedangkan nilai $a^4 = \gamma / EI$

$$\text{maka : } \lambda^2 = \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma}{EI}}$$

untuk mendapatkan frekuensi pribadi dari modus utama, misalnya untuk λ_1 diperoleh

$$\left(\frac{1,571}{l} \right)^2 = \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma}{EI}}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{2,468}{l^2} \right) \sqrt{\frac{EI}{\gamma}}$$

ini adalah frekuensi pribadi terendah. Frekuensi lainnya dapat ditentukan dengan cara yang sama.

3. Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga merupakan pendekatan terbaik yang dapat digunakan dalam analisis numerik untuk mendapatkan

jawaban dari suatu masalah engineering ataupun masalah fisis yang dapat di formulasikan dalam bentuk matematik, meskipun metode ini telah diterapkan pada bidang-bidang lain. Bila suatu kontinum di bagi-bagi menjadi beberapa bagian yang lebih kecil, maka bagian-bagian kecil ini disebut elemen hingga. Proses pembagian suatu kontinum menjadi elemen-elemen hingga ini sering dikenal sebagai proses diskretisasi (pembagian). Di namakan elemen hingga karena ukuran elemen kecil ini berhingga (bukannya kecil tidak berhingga) dan umumnya memiliki bentuk geometrik yang lebih sederhana dibandingkan dengan kontinumnya. Dengan metode elemen hingga kita dapat mengubah suatu masalah yang memiliki jumlah derajat kebebasan tidak berhingga menjadi suatu masalah dengan jumlah derajat kebebasan tertentu sehingga proses pemecahannya akan lebih sederhana.

Kontinum yang dimaksud adalah benda atau struktur berukuran relatif panjang. Struktur disini mengandung pengertian semua benda pejal yang dikenai suatu beban atau pengaruh-pengaruh lainnya. Pengaruh-pengaruh ini akan menyebabkan terjadinya deformasi (atau regangan) pada kontinum tadi. Tujuan utama analisis dengan metode elemen hingga adalah untuk memperoleh nilai pendekatan (bukan eksak) tegangan atau peralihan yang terjadi pada suatu struktur.

Pendekatan klasik analisis benda pejal membutuhkan suatu fungsi peralihan yang harus memenuhi persamaan diferensial keseimbangan, hubungan tegangan - regangan, dan kompatibilitas pada setiap titik dalam kontinum, termasuk syarat-syarat batasnya (boundaries). Karena ketatnya persyaratan-persyaratan ini, amat sedikit pemecahan-pemecahan klasik yang telah ditemukan. Di antara pemecahan-pemecahan tadi sering di jumpai adanya deret tak berhingga yang dalam perhitungan praktis harus dipotong sehingga hal ini akan menyebabkan hasil

perhitungan tadi hanyalah merupakan suatu pendekatan saja. Selain cara klasik, kita dapat juga mendiskretisasi persamaan diferensial dengan menggunakan metode beda hingga (finite difference). Namun, metode ini memiliki kerugian utama, yaitu syarat-syarat batasnya sangat sulit dipenuhi. Dan kerugian lainnya adalah akurasi hasil perhitungannya biasanya rendah.

Sebaliknya pendekatan dengan elemen hingga merupakan suatu pendekatan yang berdasarkan asumsi peralihan atau asumsi tegangan, bahkan dapat juga berdasarkan kombinasi dari kedua asumsi tadi dalam setiap elemennya. Karena pendekatan berdasarkan fungsi peralihan merupakan teknik yang sering sekali dipakai, maka langkah-langkah berikut ini dapat digunakan sebagai pedoman bila menggunakan pendekatan berdasarkan asumsi tersebut :

1. Bagilah kontinum menjadi sejumlah elemen (subregion) yang berhingga dengan bentuk geometri yang sederhana.
2. Pilih titik-titik pada elemen yang diperlukan sebagai titik nodal di mana syarat keseimbangan dan kompatibilitas harus dipenuhi.
3. Asumsikan fungsi peralihan pada setiap elemen sedemikian rupa sehingga peralihan pada setiap titik sembarang dipengaruhi oleh titik nodalnya.
4. Pada setiap elemen khusus yang di pilih tadi harus memenuhi persyaratan hubungan regangan-peralihan dan hubungan regangan-tegangannya.
5. Tentukan kekakuan dan beban titik nodal ekuivalen untuk setiap elemen dengan menggunakan prinsip usaha atau prinsip energi.
6. Turunkan persamaan keseimbangan untuk setiap titik nodal dari diskretisasi kontinum ini sesuai dengan kontribusi elemennya.
7. Selesaikan persamaan keseimbangan

ini untuk mencari peralihan titik nodal.

8. Hitung besaran yang dicari pada titik-titik tertentu dalam elemen tadi.
9. Tentukan reaksi perletakan pada titik nodal yang tertahan atau bebas bila diperlukan.

Analisis suatu kontinum elastis dengan menggunakan metode elemen hingga harus memberikan hasil yang lebih konvergen dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dari teori eksak. Jika kompatibilitas global dan lokal dipenuhi serta beban titik nodal konsisten, sifat konvergensi akan selalu tercapai. Berikutnya akan dijelaskan tiga kriteria konvergensi, namun kriteria pertama saja yang penting, karena kriteria yang lain bergantung pada kriteria pertama ini. Apabila syarat kompatibilitas antar elemen untuk elemen dengan ukuran tertentu tidak dipenuhi, maka kriteria pertama akan menjamin kompatibilitas ini. Kriteria tersebut :

- Kondisi regangan konstan
- Kondisi tubuh-kaku (rigid-body modes)
- Asumsi fungsi keseimbangan dan kelengkapan.

Kondisi regangan konstan : kondisi pemodelan dimana elemen harus dalam keadaan regangan konstan. Tipe regangan ini sangat dipengaruhi oleh hubungan regangan peralihan. Jadi, turunan tertentu dari fungsi peralihan asumsi haruslah tidak nol. Misalnya, dalam elemen aksial turunan yang harus tidak nol adalah :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \neq 0 \quad \text{..... (C.1)}$$

Jadi, paling tidak harus diasumsikan sebuah fungsi peralihan yang linier untuk u. Bagi elemen lentur, turunan yang harus tidak nol adalah :

$$\phi = \frac{d^2v}{dx^2} \neq 0 \quad \text{.....(C.2)}$$

Untuk analisis metode elemen hingga pada getaran, Pada sembarang kontinum elastis linier akan terdapat frekuensi alami dan ragam getar yang dapat dicari dengan

menggunakan massa benda tersebut beserta kekakuannya. Persamaan gerak untuk getaran bebas tanpa teredam dapat diturunkan dan diperoleh persamaan :

$$M_N \ddot{D}_N + S_N D_N = 0 \quad \text{..... (C.3)}$$

ketika menurunkan persamaan tersebut diatas kita sama sekali tidak menyinggung tentang adanya tahanan pada perletakan (support restraint). Bila ia tidak memiliki tahanan perletakan, maka struktur tersebut dapat memiliki gerakan tubuh kaku serta getaran. Karena adanya asumsi gerakan tubuh kaku dan getaran. Bila kita menganggap beberapa titik nodal ditahan, maka akan ada pencegahan terhadap beberapa atau seluruh gerakan tubuh kaku. Sehingga persamaan diatas dapat ditulis ulang sehingga yang tertinggal hanyalah untuk peralihan bebas saja seperti yang dinyatakan dalam persamaan dibawah ini

$$M_{FF} \ddot{D}_F + S_{FF} D_F = 0 \quad \text{..... (C.4)}$$

untuk lebih menyederhanakan persamaan, subskrip F dapat dihilangkan sehingga persamaan menjadi

$$M \cdot \ddot{D} + S \cdot D = 0 \quad \text{..... (C.5)}$$

Dalam persamaan diferensial ini telah kita ketahui bahwa vector D hanyalah mengandung peralihan titik nodal bebas.

Persamaan (C.5) memiliki solusi yang diketahui dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D_i = \Phi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad \text{..... C.6}$$

dimana n adalah jumlah derajat kebebasan. Dalam persamaan harmonik ini, Φ_i merupakan vector amplitudo titik nodal (atau mode shape = bentuk ragam) untuk modus getar ke - i . Notasi ω_i menunjukkan frekuensi alami dari modus ke - i dan α_i mewakili sudut fase. Jika persamaan (C.6) didiferensialkan dua kali terhadap waktu t, akan diperoleh:

$$\ddot{D}_i = -\omega_i^2 \cdot \Phi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i) \quad \text{.....(C.7)}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (C. 6) dan (C. 7) kedalam persamaan (C.5) serta

membuang suku $\sin(\omega_i t + \alpha_i)$ akhirnya akan dihasilkan :

$$(S - \omega_i^2 \cdot M) \cdot \Phi_i = C \dots\dots\dots (C.8)$$

Manipulasi ini mengakibatkan pemisahan antara variabel waktu dan ruang serta menyisakan satu seri persamaan aljabar homogen seperti pada persamaan (C.8)

Masalah aljabar nilai eigen yang ditunjukkan oleh persamaan (C.8) dapat diubah menjadi suatu bentuk standar yang simetris :

$$(A - \lambda_i \cdot I) X_i = 0 \dots\dots\dots (C.9)$$

dimana A merupakan matriks simetris sedangkan I adalah matriks satuan. Notasi λ_i menunjukkan nilai eigen ke - i sedangkan X_i merupakan vector eigen dari suatu system dengan n persamaan homogen. Kita dapat memfaktorkan baik matriks M maupun matriks S, dengan menggunakan metode akar Cholesky. Di sini kita memilih memfaktorkan S karena adanya suatu alasan penting yang akan segera terlihat. Jadi :

$$S = U^T \cdot U \dots\dots\dots (a)$$

dimana factor U merupakan matriks segitiga atas. Substitusikan persamaan (a) kedalam persamaan (C.8) untuk memperoleh:

$$(U^T \cdot U - \omega_i^2 \cdot M) \Phi_i = 0 \dots\dots\dots (b)$$

kemudian kalikan persamaan (b) dengan U^{-T} , dan sisipkan $I = U^{-T} \cdot U$ di belakang matriks M:

$$U^{-T} (U^T \cdot U - \omega_i^2 \cdot M \cdot U^{-1} \cdot U) \Phi_i = 0 \quad (c)$$

Dengau menuliskan kembali suku-suku persamaan tersebut dalam urutan terbalik akan diperoleh:

$$(M_v - \lambda_i \cdot I) \Phi_{ix} = 0 \dots\dots\dots C.10$$

di mana

$$M_v = U^{-T} \cdot M U^{-1}, \quad \lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2},$$

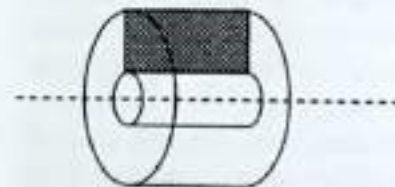
$$\text{dan } \Phi_{ix} = U \cdot \Phi_i \dots\dots\dots (C.11)$$

persamaan (C.10 37) sekarang merupakan bentuk standar yang simetris dari suatu masalah nilai eigen seperti yang di berikan

dalam persamaan (C.9) . Matriks A diwakili oleh M_v (lihat persamaan (C.11)) yang dijamin pasti simetris. Selain itu kita lihat bahwa nilai eigen λ_i sama dengan satu per frekuensi sudut kuadrat. Hal ini merupakan suatu akibat dari pilihan memfaktorkan S beserta keuntungan numeriknya karena nilai eigen tertinggi (sesuai dengan frekuensi terendah) umumnya diperoleh dulu. Vektor eigen Φ_{ix} dalam persamaan (C.10) dihubungkan dengan Φ_i melalui persamaan (C.11). Hal ini menyebabkan terjadinya perubahan pada koordinat menjadi suatu set koordinat yang matriks kekakuannya sama dengan I. Setelah nilai eigen dan vector eigen diperoleh dari persamaan (C.10), maka frekuensi sudut serta bentuk ragam dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad \Phi_i = U^{-1} \Phi_{ix} \dots\dots\dots (C.12)$$

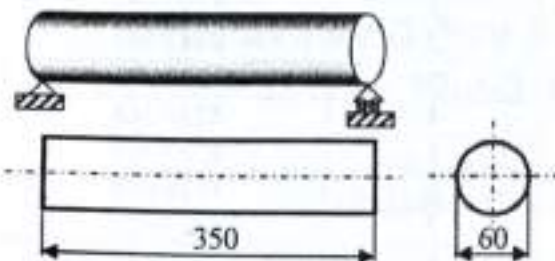
Poros dapat digolongkan pada benda pejal aksisimetris yaitu benda tiga dimensi yang diperoleh dengan cara memutar sebuah bidang terhadap suatu sumbu seperti pada gambar.



Dari gambar diatas terlihat sebuah benda pejal aksisimetris yang dipotong sebagian untuk menunjukkan bidang yang diputar tersebut. Benda jenis ini sering kali disebut benda putar (solid of revolution) dan kemungkinan memiliki berbagai bentuk elemen penampang melintang, namun jika bebannya juga aksisimetris, maka analisis terhadap bentuk cincin pejal diatas dapat diwakili oleh penampang dua dimensi saja. Titik nodal yang sebenarnya merupakan titik nodal lingkaran di gambarkan dengan titik nodal segi empat pada penampang melintang.

Poros sederhana yang akan

dianalisis seperti pada gambar :



Bahan poros adalah Besi Tuang :
 Dengan data-data : ("Mekanika Bahan", Gere & Timoshenko, hal 461)
 Berat Jenis (γ) = 70 kN/m³, Massa jenis (ρ) = 7200 kg/m³
 Modulus Elastis (E) = 150 GPa = 150 kN/mm²
 Modulus Geser (G) = 60 GPa = 60 kN/mm²
 Perhitungan frekuensi pribadi dengan MEH.

Poros dianggap pejal dengan pendekatan benda pejal aksisimetris poros dibuat dalam 7 elemen segi empat yang akan diputar pada sumbu X



Titik nodal Elemen :

2	4	6	8	10	12	14	16
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	5	7	9	11	13	15

Logika program fortran untuk perhitungan frekuensi pribadi dengan MEH ditunjukkan dalam kerangka berikut :

1. Baca dan cetak data struktur :
 - Identifikasi masalah
 - Parameter struktur
 - Koordinat titik nodal
 - Data elemen
 - Tahanan pada titik elemen (kondisi syarat batas)

- Hitung indeks peralihan
2. Turunkan matriks kekakuan dan matriks massa
 - Matriks kekakuan elemen
 - Matriks massa elemen
 - Transfer ke dalam matriks kekakuan dan massa struktur
 3. Reduksi matriks kekakuan dan matriks massa
 - Hitung matriks kekakuan tereduksi
 - Tentukan matriks transformasi
 - Hitung matriks massa tereduksi
 4. Tentukan nilai eigen dan faktor eigen
 - Faktorkan matriks kekakuan
 - Inverskan matriks kekakuan
 - Ubahlah masalah nilai eigen ke dalam bentuk standar yang simetris
 - Hitung nilai eigen dan faktor eigen
 - Transformasi balik dari vektor eigen
 - Normalkan vektor eigen (terhadap nilai terbesar)
 5. Cetak hasil
 - Nomor (titik) nodal, modus (Tiga modus pertama)
 - Frekuensi pribadi

Dimana matriks kekakuan titik nodal untuk elemen segi empat pada elemen lentur :

$$K = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 24 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks massa titik nodal berbentuk :

$$M = \frac{\rho \cdot A \cdot l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & -6l & 24 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Dengan mengikuti logika pemrograman diatas dibuat program analisis dengan bahasa Fortran yang hasilnya sebagai berikut :

Modus Pertama $\lambda_1 l = 1,571$, Modus kedua $\lambda_2 l = 4,742$, Modus ketiga $\lambda_3 l = 7,854$

Titik Nodal	ω Modus I	ω Modus II	ω Modus III
1	8242.984	183173.9	508471.1
2	8247.861	183282.3	508771.9
3	8233.231	182957.2	507869.5
4	8238.108	183065.6	508170.3
5	8223.478	182740.5	507267.9
6	8228.355	182848.8	507568.7
7	8213.725	182523.7	506666.3
8	8218.602	182632.1	506967.1
9	8213.183	182511.7	506632.8
10	8218.06	182620	506933.6
11	8222.936	182728.4	507234.4
12	8227.813	182836.8	507535.2
13	8232.689	182945.1	507836
14	8237.566	183053.5	508136.8
15	8242.442	183161.9	508437.7
16	8247.319	183270.2	508738.5

Dari hasil diatas modifikasi frekuensi pribadi poros dpat dilakukan dengan mengambil modul kedua (modus tengah) dan mengambil pada titik nodal yang frekuensi pribadinya paling tinggi (mengalami lenturan terbesar) sehingga poros dapat dimodifikasi dibuat seperti pada gambar



Dengan frekuensi pribadi perubahan (modifikasi) :

Modifikasi dilakukan pada nodal 6, 8, 10 dan 12 dengan mengambil nilai frekuensi pribadi dari modus 2.

Titik Nodal	ω frekuensi pribadi
1	8242.984
2	8247.861
3	8233.231
4	8238.108
5	8223.478
6	182848.8
7	8213.725
8	182632.1
9	8213.183
10	182620
11	8222.936
12	182836.8
13	8232.689
14	8237.566
15	8242.442
16	8247.319

Referensi :

- Craig, Roy R. Jr., 1981, "Struktural Dynamics", John Wiley & Sons, New York.
- Gere, James M., Timoshenko, Stephen P., 2000, "Mekanika Bahan", Erlangga, Jakarta.
- Paz Mario, 1996, "Dinamika Struktur", Erlangga, Jakarta.
- Vierek Robert K., 1995, "Analisis Getaran", Eresco, Bandung.
- Weaver William, Jr., Gere James M., Wira, 1996, "Analisis Matriks untuk Struktur Rangka", Erlangga, Jakarta.
- Weaver William, Jr., Johnston Paul R., 1993, "Elemen Hingga untuk Analisis Struktur", Eresco, Bandung.