ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MEMBUKTIKAN PROPOSISI STRUKTUR ALJABAR DENGAN PEMBERIAN SCAFFOLDING METAKOGNITIF

Awi
Jurusan Matematika, Universitas Negeri Makassar
Awi.dassa@unm.ac.id

Abstrak – *Penelitia ini merpakan penelitian kualitatif deskriptif yang memaparkan analisis kesalahan mahasiswa dalam membuktikan proposisi struktur aljabar dengan pemberian scaffolding metakognitif. Beberapa kemungkinan kesalahan mahasiswa itu diakibatkan oleh: : tidak paham materinya, tidak paham proposisinya, tidak tahu cara membuktikan, tidak tahu apa yang akan dibuktikan, dan keliru dalam membuktikan.*

Kata kunci: *Analisis Kesalahan, Proposisi Struktur Aljabar, Saffolding, Metakognitif*

I. PENDAHULUAN

Matematika merupakan mata pelajaran yang paling disukai oleh siswa di tingkat sekolah dasar, utamanya yang duduk dikelas I, II, dan III. Namun secara perlahan mereka berbalik arah yang tadinya menyenangi berubah menjauh dari matematika yaitu ketika mulai mempelajari materi yang melibatkan symbol-simbol aljabar. Hasil penelitian Awi (2005) yang dilaksanakan pada Sekolah Dasar Negeri Ketintang yang menelusuri kapan dan bagian mana dari matematika yang menyebabkan Peserta Didik tidak senang matematika. Ternyata hasil penelitian itu menemukan bahwa dari kelas I, II, dan III, hamper semua Peserta Didik senang belajar matematika, karena masih menyajikan konsidi real dalam bentuk angka-angka dan operasi bilangan tanpa menggunakan symbol atau variabel. Namun ketika mulai mempelajari materi yang memuat symbol-simbol dan variabel yaitu saat di pertengahan kelas III dan seterusnya, maka secara perlahan Peserta Didik mulai menjauh dari matematika.

Sama halnya dengan mahasiswa Jurusan Matematika di perguruan tinggi, hampir semua enjoy mempelajari mata kuliah yang kurang menggunakan simbol-simbol atau variabel. Namun ketika mata kuliah itu menggunakan simbol-simbol atau variabel seperti yang dinyatakan dalam bentuk rumus-rumus, definisi, aksioma, teorema/ proposisi, lemma, dan lain sebagainya, maka saat itulah Peserta Didik mulai bekerja keras mempelajarinya, misalnya mata kuliah Aljabar Elementer yang secara sepintar seakan-akan mudah materinya, namun sulit untuk mengubah bentuk aljabar ke bahasa verbal begitu juga sebaliknya, Aljabar Linear Elementer, lebih-lebih lagi dalam mempelajari struktur Aljabar.

Jadi matematika disukai oleh Peserta Didik hanya saat matematika didekatkan dengan kondisi riil dalam kehidupan sehari-hari.

II. PENGERTIAN TEORI GROUP

Herstein (1995) mengatakan bahwa sebuah himpunan tidak kosongG disebut sebagai grup jika terdapat operasi * sedemikian sehingga G tertutup terhadap operasi *, sifat asosiatif terpenuhi di G, G memiliki unsur identitas, dan setiap unsur di G memiliki invers. Selain itu, jika sifat komutatif terpenuhi di G, maka dikatakan G adalah grup abelian. Raisinghania dan Aggarwal (1980) menyimbolkan grup yang memuat himpunan G dan komposisi biner * dalam bentuk ekspresi aljabar (G,*).Durbin (2009) mengatakan bahwa terkadang suatu grup hanya dinyatakan dengan himpunannya, namun ini terjadi jika operasi yang ada di dalamnya dianggap sudah jelas.Sebagai contoh, ketika dituliskan grup dari himpunan bilangan bulat, maka dianggap bahwa operasi yang ada di dalamnya adalah penjumlahan. Beberapa contoh grup adalah $(\mathbb{R}^+,), (2\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q},), (M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$, dan $(GL_{2\times 2}(\mathbb{R}), \times)$

Terdapat istilah di dalam grup teori yang memiliki dua makna bergantung pada redaksi pernyataan. Herstein (1995) mengatakan bahwa sebuah grup G dikatakan terbatas jika banyak anggotanya terbatas. Banyaknya anggota di dalam grup G dikatakan order dari G dan ditulis |G|. Di sisi lain, Raisinghania dan Aggarwal (1980) mengatakan bahwa misalkan a adalah eemen dari suatu grup G yang memiliki unsur identitas e, maak order dari a, ditulis $ord(a)$, adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga $a^n = e$. Jika tidak terdapat n yang demikian, maka a dikatakan memiliki order tidak berhingga atau nol.

Ada beberapa sifat dasar dari grup. Raisinghania dan Aggarwal (1980) menyatakan bahwa unsur identitas di grup bersifat tunggal, setiap unsur di grup memiliki invers yang unik dan invers dari inversnya adalah unsur itu sendiri, invers dari perkalian dua unsur di suatu grup adalah perkalian dari invers setiap unsur tadi dengan urutan terbalik, hukum pembatalan berlaku di grup, identitas kiri dari grup adalah identitas kanan dan demikian pula sebaliknya, serta invers kiri dari suatu elemen di grup adalah invers kanan dan demikian pula sebaliknya. Sebagai tambahan, Hungerford (N.D.) mengatakan bahwa misal G grup dan $a \in G$. Maka untuk setiap $m, n \in Z, a^m a^n = a^{m+n}\ dan\ (a^m)^n = a^{mn}$. Selain itu, Badawi (2001) menyatakan bahwa order dari suatu elemen dan inversnya pasti sama.

Berikut beberapa bagian materi dari teori grup:

a. Grup poid, Semi Grup, dan Monoid
b. Pangkat dan Order elemen Grup dan Grup Siklik
c. Kompleks, Sub Grup, dan Sub Grup Normal
d. Grup Permutasi
e. Grup Faktor
f. Homomorpisma, Monomorpisma, dan Isomorpisma Grup

III. PEMBUKTIAN DALAM MATEMATIKA

Kata pembuktian dalam bahasa Inggris disebut proof dan membuktikan disebut prove yang berasal dari bahasa latin probare yang berarti mencoba, mengetes, atau menduga (Alsina dan Nelsen, 2010). Griffiths dalam Ko dan Knuth (2009) mendifinisikan pembuktian sebagai sebuah garis yang formal dan logis terkait alasan yang dimulai dengan sekumpulan aksioma dan dengan beberapa tahap logis sampai pada kesimpulan. Hal ini mirip dengan pernyataan Bell dalam Guler (2016) bahwa pembuktian adalah aksioma, konsep dasar, dan teorema yang disusun dengan skema tertentu secara deduktif. Selain itu, sebuah pembuktian formal, menurut Hilbert dan Tall dkk (2012) adalah pernyataan tentang teorema. Ditegaskan oleh Collin's Dictionary of Mathematics dalam Borwein (2012), kata benda pembuktian adalah serangkaian pernyataan yang berdasarkan pada aksioma dan asumsi, selanjutnya kesimpulan, yang dengannya nilai kebenaran dari suatu pernyataan dapat diperoleh. Dengan demikian, pembuktian adalah penjelasan tentang nilai kebenaran suatu proposisi dengan menggunakan alasan logis.

Proposisi yang akan dibuktikan bermacam-macam bentuknya. Dengan demikian, tedapat beberapa metode yang dapat dipilih bergantung pada kebutuhan. Terkadang pula dalam satu pembuktian diperlukan beberapa metode. Beberapa jenis pembuktian yang sering digunakan dalam matematika yaitu:

a. Bukti Langsung

Untuk membuktikan suatu pernyataan matematika dengan menggunakan bukti langsung, maka pembuktian didasarkan pada definisi, prinsip, atau pernyataan logis yang terkait dengan pernyataan matemtika tersebut.

Contoh pembuktian langsung:

Proposisi: Jika G adalah grup Boolean, maka G adalah grup Abelian

Bukti: Ambil $a, b \in G$ sebarang. Karena G grup, maka G tertutup, akibatnya $ab \in G$. Karena G grup Boolean, berdasarkan definisi, $a^2 = e, b^2 = e,$ dan $(ab)^2 = e$. Selanjutnya, perhatikan bahwa $ba = e(ba) = (ab)^2(ba) = abab(ba) = aba(bb)a = abaea = ab(aa) = abe = ab$. Karena $ab = ba$, maka berdasarkan definisi, G adalah grup Abelian. QED.

a. Bukti dengan Kontradiksi

Untuk membuktikan suatu pernyataan matematika dengan menggunakan bukti kontradiksi, maka pembuktian dilakukan dengan menyatakan suatu yang kejadiannya berkomplemen dengan pernyataan matematika tersebut, kemudian menguraikannya sampai diakhir uraian diperoleh hasil yang tidak mungkin terjadi.

Contoh pembuktian dengan kontradiksi:

Proposisi: Jika G grup, maka elemen identitas di G tunggal.

Bukti: Akan dibutikan secara kontradiktif. Misal elemen identitas di G lebih dari satu. Ambil e, f elemen identitas di G dengan $e \neq f$. Karena e, maka $ef = f$. Di lain pihak, karena f elemen identitas, maka $ef = e$. Akibatnya, $e = f$. Hal ini kontradiktif dengan asumsi bahwa $e \neq f$. Dengan demikian asumsi salah. Akibatnya, elemen identitas di G tunggal. QED.

b. Bukti dengan Induksi Matematika

Menurut Bittinger (1982), prinsip dari induksi matematika adalah kita mengandaikan $P(n)$ merupakan pernyataan untuk suatu bilangan asli$n$, jika $P(1)$ dan $\forall k \in \mathbb{N}$ berakibat $P(k)$ benar maka pernyataan benar untuk semua bilangan asli n.

Contoh pembuktian dengan induksi matematika:

Proposisi: Jika G adalah grup berorde p^n untuk suatu bilangan prima p, maka G memuat suatu subgrup normal yang berorde p^{n-1}.

Bukti: Akan dibuktikan dengan induksi matematika. Untuk $n = 1$, G berorde p dan memiliki subgrup normal trivial, yaitu $\{e\}$ yang berorde $p^{1-1} = p^0 = 1$. Sekarang, kita asumsikan setiap grup yang berorde p^k memuat subgrup normal yang berorde p^{k-1} untuk suatu bilangan asli k. Akan dibuktikan bahwa grup yang berorde p^{k+1} memuat subgrup normal yang berorde p^k untuk suatu bilangan asli k. Jika G berorde p^{k+1}, maka berdasarkan teorema terdapat $a \in G$ yang berorde p di $Z(G)$. Akibatnya subgrup $A = (a)$ yang dibangun oleh a berorde p dan normal di G. Perhatikan grup kuosien $H = G/A$.Berdasarkan teorema Lagrange$|H| = \frac{|G|}{|A|} = \frac{p^{k+1}}{p} = p^k$. Selanjutnya berdasarkan teorema, H merupakan pemetaan homomorfik dari G, sehingga terdapat subgrup normal N di G yang memuat A sedemikian sehingga $\frac{|N|}{|A|} = |N/A| = p^{k-1}$. Akibatnya subgrup normal N dari G memenuhi $|N| = p^k$. Ini melengkapi induksi kita. QED.

IV. KESALAHAN DALAM PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Selden dan Selden (2003) menemukan beberapa kesalahan dalam pembuktian yang dilakukan mahasiswa, yaitu memperlemah dan salah menggunakan teorem, menggunakan pembuktian dengan celah dan berbelit-belit, mengganti dengan bebas, mengabaikan kuantor, dan menggunakan informasi di luar konteks. Selain itu, Risnanosanti (2015) menyatakan bahwa kategori kesalahan mahasiswa dalam melakukan pembuktian struktur aljabar adalah pernyataan berlebih, pembuktian yang tidak cukup, pembuktian yang tidak selesai, deduksi yang keliru, kegagalan memisahkan hipotesis dan kesimpulan, kekeliruan komputasi, kesalahan dalam menggunakan logika, gagal menggunakan kasus ketika dibutuhkan, tidak sesuai meniru pembuktian sebelumnya, dan menghilangkan aksi yang penting. Selain itu, salah menggunakan simbol juga merupakan kesalahan umum dalam membuktikan (Selden dan Selden, 2003; Senk dalam Stavrou, 2014; Risnanosanti, 2015).

Selain itu, ada beberapa miskonsepsi dalam pembuktian yang dilakukan oleh mahasiswa, di antaranya, mengganti bukti formal dengan contoh yang spesifik (Stavrou, 2014; Stylianides dalam Stavrou, 2014), memulai kesimpulan dari proposisi padahal itulah yang akan dibuktikan (Stavrou, 2014; Selden dan Selden, 2003; Risnanosanti, 2015), lupa membuktian kedua implikasi dari pernyataan yang biimplikatif (Stavrou, 2014; Sidjara, 2016), menulis bukti dan contoh penyangkal dalam satu pembuktian (Stylianides dan Al-Murani dalam Stavrou, 2014), salah mengerti dan salah menggunakan definisi (Senk dalam Stavrou, 2014; Stavrou, 2014; Risnanosanti, 2015), dan menggunakan konvers dari teorema (Selden dan Selden, 2003).

Berikut contoh kesalahan pembuktian matematis yang ditemukan oleh Selden dan Selden (2003).

Proposisi: Misal n adalah bilangan bulat positif dan n^2 adalah bilangan kelipatan tiga, buktikan bahwa n adalah bilangan berkelipatan tiga.

Bukti: Misal n^2 adalah bilangan ganjil positif yang dapat dibagi 3, yaitu $n^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3n(n+2) + 1$. Maka n^2 habis dibagi 3. Misalkan n^2 genap dan merupakan kelipatan 3. Yaitu $n^2 = (3n)^2 = 9n^2 = 3n(3n)$. Jika kita faktorkan $n^2 = 9n^2$, kita memeroleh $3n(3n)$; yang berarti n adalah kelipatan 3. QED.

Terdapat beberapa masalah di dalam pembuktian di atas, yaitu:

a. Pernyataan "Misal n^2 adalah bilangan ganjil positif yang dapat dibagi 3" sebenarnya tidak salah, akan tetapi dalam pembuktian ini tidak dibutuhkan pembagian kasus gajil dan genap karena tidak terdapat keterkaitan antara ganjil genap dan kelipatan 3 (E1).

b. Pada pernyataan "$n^2 = (3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3n(n+2) + 1$", ditemukan 4 kesalahan, yaitu yang diasumsikan ganjil adalah n^2, namun yang diaplikasikan justru $n = 3n + 1$ (E1). Selain itu, n digunakan dalam dua tempat berbeda di dalam satu persamaan padahal arti yang digunakan berbeda (E5), padahal di dalam matematika tidak diperkenankan meggunakan simbol yang sama dengan makna berbeda kecuali untuk pembuktian yang saling lepas. Selain itu, bilangan ganjil dinyatakan dalam bentuk $n = 2m + 1$, bukan justru $n = 3m + 1$ untuk suatu bilangan bulat m yang berbeda dengan n (E3). Terakhir, dituliskan $9n^2 = 3n(n)$ yang seharusnya $9n^2 = 3n(3n)$ (E4).

c. Kesimpulan untuk kasus pertama dituliskan "n^2 habis dibagi 3" padahal yang akan dibuktikan adalah keterbagian n oleh 3 (E1).

d. Pernyataan "Misalkan n^2 genap dan merupakan kelipatan 3" sebenarnya tepat untuk mengawali kasus yang berbeda, akan tetapi dalam pembuktian ini tidak dibutuhkan pembagian kasus ganjil dan genap (E1).

e. Persamaan $n^2 = (3n)^2$ mengindikasikan yang bahwa yang diasumsikan berkelipatan 3 adalah n, bukan n^2 (E1).

f. Kata "faktor" yang digunakan pada pernyataan "Jika kita faktorkan $n^2 = 9n^2$" keliru karena kata "faktor" digunakan untuk ekspresi, bukan persamaan (E3).

g. Kesimpulan yang ditarik pada pernyataan "kita memeroleh $3n(3n)$; yang berarti n adalah kelipatan 3" keliru, karena $3n(3n)$ merupakan bentuk lain dari n^2, bukan n (E1).

V. *SCAFFOLDING* METAKOGNITIF

Pendekatan konstruktivistik dalam pengajaran lebih menekankan pada pengajaran top-down daripada bottom-up. Top-Down berarti bahwa Peserta Didik mulai dengan masalah-masalah yang kompleks untuk dipecahkan dan selanjutnya memecahkan atau menemukan (dengan bantuan guru) keterampilan-keterampilan dasar yang diperlukan (Nur, 2004). Peserta Didik memerlukan bantuan ketika berada pada Daerah Perkembangan Terdekat (*Zone of Proximal Development (ZPD)*). ZPD adalah tingkat perkembangan sedikit di atas tingkat perkembangan pengetahuan Peserta Didik saat itu (Ratumanan, 2002; 42).

Secara lengkap Vygotsky mendefinisikan ZPD sebagai berikut.

> " *… the distance between the actual development level as determined through independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers."* (Taylor, 1993)

(artinya:' … jarak antara level perkembangan aktual yang ditunjukkan melalui pemecahan masalah *secara* mandiri dengan level perkembangan potensial yang ditunjukkan melalui pemecahan masalah atas bimbingan orang dewasa atau dalam kolaborasi dengan teman sebaya yang lebih mampu.)

Bantuan yang diperoleh Peserta Didik dari guru atau yang lebih ahli dikenal dengan istilah perancahan atau *Scafolding* yang dapat mendorong Peserta Didik untuk mengarahkan proses kognitifnya. Slavin (dalam Ratumanan 2002; 44) menyatakan bahwa *Scafolding* berarti memberikan kepada Peserta Didik sejumlah besar dukungan selama tahap awal pembelajaran dan kemudian mengurangi bantuan dan memberikan kesempatan kepada Peserta Didik itu untuk mengambil tanggungjawab yang semakin besar segera setelah ia mampu melakukan tugas tersebut secara mandiri.

Jika masalah atau konsep berada dalam ZPD Peserta Didik, maka Peserta Didik membutuhkan bantuan dari orang dewasa atau teman sejawat yang lebih mengetahui. Menurut Viygotsky, proses belajar terjadi apabila Peserta Didik belajar memecahkan masalah atau menangani tugas-tugas itu masih berada dalam jangkaunnya atau masih dalam ZPD mereka. Menurut Slavin (1997 : 268), ide konstruktivisme modern banyak berdasarkan empat kunci teori Vygotsky, sebagai berikut

a. Penekanan pada pembelajaran sosial

b. Peserta Didik belajar konsep paling baik jika mereka berada pada zone perkembangan terdekat (ZPD) mereka. ZPD (*Zone of Proximal Development*) adalah suatu jarak antara level perkembangan aktual yang ditentukan melalui pemecahan masalah secara bebas dengan level perkembangan potensial yang ditentukan melalui pemecahan masalah atas bimbingan orang dewasa atau dalam kolaborasi dengan teman sebaya yang lebih mampu.(Taylor, 1993 : 5)

c. Pemagangan kognitif : Peserta Didik belajar melalui interaksi dengan orang yang lebih menguasai permasalahan

d. *Scaffolding* merupakan hal penting dalam pemikiran konstruktivistik modern yang didasarkan pada ide Vygotsky tentang konsep pembelajaran dengan bantuan (*assisted learning*). Interpretasi terkini tentang ide-ide Vygotsky bahwa Peserta Didik diberikan tugas-tugas kompleks, sulit dan realistik, kemudian diberikan bantuan secukupnya untuk menyelesaikan tugas-tugas ini (bukan diajar sedikit demi sedikit mengenai komponen-komponen tugas). Menurut Vygotsky, fungsi-fungsi mental yang lebih tinggi, termasuk didalamnya kemampuan untuk mengarahkan memori dan atensi untuk tujuan tertentu serta kemampuan untuk berpikir dalam simbol-simbol, adalah perilaku yang membutuhkan bantuan media. Dengan mendapatkan bantuan secara eksternal oleh budaya, perilaku itu masuk dan melekat dalam benak Peserta Didik sebagai alat psikologis. Dalam pembelajaran dengan bantuan, guru sebagai agen budaya yang memandu pengajaran sehingga Peserta Didik akan menguasai secara tuntas ketrampilan-ketrampilan yang memungkinkan fungsi kognitif yang lebih tinggi.

e. Ada beberapa cara yang dapat dilakukan dalam pemberian *scaffolding* oleh guru kepada Peserta Didik diantaranya: (1) mengingatkan kembali materi-materi prasyarat, sehingga pemikiran Peserta Didik terkait dengan pengetahuan yang dikonstruk (2) menjelaskan makna pengetahuan/ konsep/ tugas yang sedang dikonstruk, sehingga Peserta Didik mengerti apa yang akan dilakukan selanjutnya, (3) memberikan pertanyaan-pertanyaan metakognitif dengan tujuan Peserta Didik dapat merancang strategi yang digunakan dalam memahami/ menyelesaikan pengetahuan/ konsep/ tugas tersebut., dan lain sebagainya. Namun dalam penelitian ini akan diarahkan pada poin (3) yaitu pemberian *scaffolding* dengan menggunakan pertanyaan-pertanyan metakognitif.

f. Dengan cara ini, Peserta Didik akan terbiasa melibatkan metakognitifnya dengan jalan menanya diri mereka sendiri dengan pertanyaan-pertanyaan metakognitif.

Pemberian *scaffolding* disamping dapat dilakukan oleh guru, juga oleh Peserta Didik yang lebih menguasai pengetahuan/ konsep/ tugas tersebut. Peserta Didik yang memberi *scaffolding* kepada temannya yang belum mengerti apa dipelajari biasa disebut tutor sebaya. Namun pemberian *scaffolding* oleh Peserta Didik tidak seketat dengan jika guru yang memberikan *scaffolding* yang harus memperhatikan berbagai aspek sehingga Peserta Didik yang diberi *scaffolding* dapat memahaminya dengan cepat dan tepat.

Anderson dan Krathwohl (2001) yang menyatakan empat tipe pengetahuan yaitu (1) pengetahuan tentang *fakta* adalah pengetahuan diskrit, elemen yang tertentu (misal: semacam sepotong informasi). Termasuk pengetahuan terminologi dan pengetahuan istilah, pengetahuan yang spesifik dan elemen); (2) pengetahuan *konseptual* adalah pengetahuan yang lebih kompleks dari pengetahuan fakta, tetapi tersusun dengan baik juga termasuk pengetahuan klasifikasi dan kategori, prinsip-prinsip dan generalisasi, dan teori, model, dan struktur; (3) Pengetahuan *prosedural* adalah "pengetahuan bagaimana mengerjakan sesuatu", termasuk pengetahuan keterampilan dan algoritma, teknik dan metode, juga tentang kriteria yang digunakan untuk menentukan dan/atau untuk menjastifikasi; dan (4) pengetahuan metakognitif adalah pengetahuan tentang kognisi secara umum juga kesadaran dan pengetahuan tentang kognisi diri sendiri, meliputi pengetahuan strategi, pengetahuan tentang tugas-tugas kognitif, termasuk pengetahuan kontekstual dan pengetahuan kondisional, serta pengetahuan diri sendiri. Tentunya, aspek-aspek tertentu dari pengetahuan metakognitif tidak selalu sama dengan yang didefinisikan masing-masing ahli.

Dalam kamus Oxford diartikan bahwa; *cognition is the process by which knowledge and understanding is developed in the mind.* (Artinya proses dimana pengetahuan dan pemahaman dibangun/dikembangkan dalam pikiran).

Berpikir tentang berpikir adalah salah satu hal yang memungkinkan terjadinya pemahaman lebih dari Peserta Didik yang lainnya. Para pakar seperti *Huitt*, (1997); *NCREL*, (1995); *Kasper*, (1997); *O'Neil & Brown* (1997); dan *Livington* (1997) memaknai ungkapan 'berpikir tentang berpikir" dengan istilah metakognisi. Metakognisi diartikan oleh masing-masing pakar dengan redaksi dan sudut pandang yang berbeda.

Flavell & Miller (Santrock, 2007) menyatakan bahwa metakognisi berarti 'kognisi tentang kognisi', atau 'mengetahui tentang mengetahui'. Peserta Didik yang mengelola kegiatan kognitifnya memungkinkan dapat menangani tugas dan menyelesaikan masalah dengan baik.

Dengan demikian Scaffolding Metakognitif adalah memberikan kepada Peserta Didik sejumlah besar dukungan selama tahap awal pembelajaran dan kemudian mengurangi bantuan sampai meyadari setiap langkah, konsep, prinsipnya dan mampu mengambil tanggungjawab yang semakin besar dan melaksanakan tugas secara mandiri.

Dengan memberikan scaffolding metakognitif memungkinkan seorang pengajar memungkinkan untuk menelusuri bagian-bagian bateri yang telah dipahami oleh Peserta Didik dan sekaligus mengidentifikasi kesulitan-kesulitan yang dialami Peserta Didik dalam mempelajajari atau menyelesaikan suatu Masalah.

VI. KAITAN *SCAFFOLDING* METAKOGNITIF DENGAN KESALAHAN PEMBUKTIAN PROPOSISI

Untuk menelusuri keslahan mahasiswa dalam membuktikan proposisi materi struktur aljabar, maka seorang Dosen harus terlebih dahulu mengenal bagia-bagian mana dari suatu proposisi struktur aljabar yang telah diketahu dan belum dikatahui oleh seorang mahasiswa. Dari gejala yang diperlihatkan dari hasil kerja siswa yang sedang melakukan kesalahan belum cukup untuk menkleim bahwa mahasiswa tersebut tidak memahaminya.

Dalam melakukan kesalahan dalam membuktikan proposisi struktur aljabar, ada banyak kemungkinan penyebab, diantaranya: tidak paham materinya, tidak paham proposisinya, tidak tahu cara membuktikan, tidak tahu apa yang akan dibuktikan, dan keliru dalam membuktikan. Dari semua kemungkinan ini dapat ditelusuri dengan scaffolding metakognitif.

VII. KESIMPULAN

a. Secara umum Peserta didik menyenangi matematika pada saat matematika ditampilkan dengan kondisi riil seperti apa yang dialami dalamkehitupan sehari-hari. Namun mereka merasa sulit ketika matematika ditampilkan dan bentuk aljabar (memuat variabel)
b. Beberapa kemungkinan kesalahan mahasiswa itu diakibatkan oleh: : tidak paham materinya, tidak paham proposisinya, tidak tahu cara membuktikan, tidak tahu apa yang akan dibuktikan, dan keliru dalam membuktikan.
c. Kealahan mahasiswa dalam membuktikan proposisi struktur aljabar dapat ditelusuru dengan menerapkan scaffolding metakognitif.
d. Kesalahan-kesalahan yang sering terjadi antara lain adalah *subscript* pada kuantitas permeabilitas ruang hampa misalnya harusditulis dengan memakai angka nol bukan dengan huruf "o". Penggunaan prefik asing "non" tidak dipisah dengan kata selanjutnya.

PUSTAKA

[1] Awi, 2005. Penelusuran Kapan dan bagian mana dari matematika yang Menyebabkan Siswa Tidak Senang Belajar Matematika (Studi Kasus di SD Negeri Ketintang – Surabaya: Suarabaya.

[2] Alsina, Claudi dan Roger B. Nelsen. 2010. *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*. The Mathematical Association of America: USA.
[3] Badawi, Ayman. 2001. *Abstract Algebra Manual, Problems and Solutions.* Nova Science Publishing Inc.: Huntington, New York.
[4] Bittinger, Marvin L. 1982. *Logic, Proof, and Sets (Second Edition).* Addison-Wesley Publishing Company.
[5] Borwein, Jonathan Michael. 2012. *Exploratory Experimentation: Digitally-Assisted Discovery and Proof.* Gila Hanna and Michael de Villiers. *Proof and Proving in Mathematics Education.* Springer: New York.
[6] Durbin, John R. 2009. *Modern Algebra: An Introduction (Sixth Edition).* John Wiley and Sons Inc.: USA.
[7] Herstein, I. N. 1995. *Abstract Algebra (Third Edition)*. John Wiley and Sons Inc.: USA.
[8] Raisinghania, M. D. and R. S. Aggarwal. 1980. *Modern Algebra (Seventh Edition)*. S. Chand & Company Ltd: New Delhi.
[9] Risnanosanti. 2015. Undergraduates' Proof Construction Ability in Abstract Algebra. *Proceeding of International Conference on Research, Implementation, and Education of Mathematics and Sciences 2015*.
[10] Selden, Annie dan John Selden. 2013. Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving. *Proceeding on Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*.Vol.3.
[11] Stavrou, Stavros Georgios. 2014. Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Jurnal IUMPTS*. Vol.1.
[12] Sugiyono. 2010. *Metode Penelitian Pendidikan: Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D.* Alfabeta: Bandung.
[13] Tiro, Muhammad Arif dan Sabri. 2012. *The Foundations of Mathematics*. Andira Publisher: Makassar.
[14] Anderson, O.W. & Krathwohl, D.R; 2001. *A Taxonomy For Learning, Teaching, and Assessing (A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*). New York: Addision Wesley Longman, Inc.
[15] Livingston, Jennifer A. *Metacognition: An Overv*iew. Available: http://www.gse.buffalo.edu/fas/shuell/cep564/metacog.htm
[16] Nur, Mohamad dan Wikandari, P. Retno. 2004. *Pengajaran Berpusat kepada Siswa dan Pendekatan Konstruktivis dal Pengajaran.* UNESA, PSMS.
[17] Ratumanan, Tanwey Gerson, 2002, *Belajar dan Pembelajaran,* Surabaya, Unesa University Press.
[18] Slavin, Robert E. (1997). *Educational Psychology-Theory and Practice*. Fifth Edition. Boston : Allyn and Bacon.
[19] Taylor, Lyn (1993). *Vygotskian Influences in Mathematics Education, with Parti-cular Reference to Attitude Development*. Focus on Learning Problems in Mathematics Vol.15, N. 2 & 3, p. 3–17. University of Colorado – Denver.