Bentuk Elips sebagai suatu Permukaan Reimann

Muhammad Abdy
Jurusan Matematika – FMIPA – Universitas Negeri Makassar
e-mail: muh.abdy@unm.ac.id

Abstrak - *Paper ini membahas pembuktian bentuk elips sebagai suatu permukaan Reimann. Pembuktian-pembuktiannya dirancang khusus agar memudahkan menggunakan teorema-teorama dasar dalam Topologi, Geometri Diffrensial, Analisis Kompleks dan koordinat bola. Pembuktian yang digunakan adalah pembuktian dengan pengkonstruksian dan pengkontradiksian.*

Kata kunci: *Elips, Bola, Permukaan Reimann*

I. PENDAHULUAN

Secara umum, permukaan merupakan suatu ruang topologi, yaitu suatu himpunan tertentu dengan suatu topologi yang didefinisikan kepadanya. Permukaan Reimann merupakan suatu permukaan yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Secara formal permukaan Reimann didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.1. (Ahmad, 1989)
Suatu permukaan Reimann E adalah suatu ruang topologi dengan koleksi fungsi $A=\{f_i \mid i\in I\}$ dan memenuhi syarat-syarat berikut:

(a) E^2 merupakan ruang topologi Hausdorff yang terhubung
(b) Setiap f_i merupakan homeomorfisma dari domain E_i ke himpunan bagian terbuka D_i pada bidang kompleks C.
(c) $\{E_i \mid i\in I\}$ merupakan tudung terbuka untuk E
(d) Setiap fungsi transisi yang didefinisikan merupakan holomorfi.

Definisi 1.2. (Thomas dan Finney, 1996)
Suatu elips terdiri atas $(x, y, z)\in R^3$ yang memenuhi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

Tanpa mengurangi generalisasi, bentuk elips yang disimbolkan sebagai E^2, yang akan digunakan adalah elips berunit satu pada bidang–xy dan berkutub di z=2 dan z=-1. Sehingga E^2 adalah suatu elips dengan $|x|\le 1$, $|y|\le 1$ dan $|z|\le 2$ dan titik-titik (1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,2), dan (0,0,-2) terletak pada elips E^2. Jika titik-titik tersebut dimasukkan ke (1), maka diperoleh $a=\pm 1$, $b=\pm 1$ dan $c=\pm 2$, sehingga diperoleh:

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \qquad (2)$$

Oleh karena itu, E^2 dapat didefinisikan sebagai:

$$E^2=\left\{(x,y,z)\in R^2 \mid x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\right\} \qquad (3)$$

II. BENTUK ELIPS E^2 SEBAGAI SUATU PERMUKAAN REIMANN

Kita akan menggunakan Definisi 1.1 untuk memperlihatkan bahwa elips E^2 merupakan suatu permukaan Reimann dengan membuktikan Teorema 2.1 berikut.

Teorema 2.1.
$E^2=\left\{(x,y,z)\in R^2 \mid x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1\right\}$ merupakan suatu permukaan Reimann.

Bukti:
Pembuktian dilakukan dengan memperlihatkan bahwa E^2 memenuhi Definisi 1.1.
Pertama kali diperlihatkan bahwa E^2 adalah suatu ruang topologi.
Misalkan didefinisikan V sebagai himpunan buka pada E^2 yang berbentuk $V=U\cap E^2$ dengan U adalah himpunan buka dalam R^3. Misalkan τ adalah koleksi himpunan buka pada E^2. Karena ϕ adalah himpunan buka, dan ϕ adalah himpunan bagian dari sebarang himpunan, maka ϕ adalah himpunan buka pada E^2 sehingga $\phi\in\tau$. Kemudian, diketahui bahwa R^3 adalah buka dan merupakan suatu himpunan bagian dari R^3, maka $R^3\cap E^2 = E^2$ adalah suatu himpunan buka pada E^2 sehingga $E^2\in\tau$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\bigcup_i V_i\in\tau$ sebagai berikut:

$$\bigcup_i V_i = V_1\cup V_2\cup V_3\cup\ldots$$
$$=(U_1\cap E^2)\cup(U_2\cap E^2)\cup(U_3\cap E^2)\cup\ldots$$
$$=\left(\bigcup_i U_i\right)\cap E^2.$$

Karena $\left(\bigcup_i U_i\right)$ adalah himpunan buka dalam R^3, maka $\bigcup_i V_i=\left(\bigcup_i U_i\right)\cap E^2$ adalah himpunan buka pada E^2. Oleh karena itu $\bigcup_i V_i\in\tau$. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\bigcap_{i=1}^{n} V_i\in\tau$, sebagai berikut:

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i = V_1\cap V_2\cap V_3\cap\ldots$$

$= (U_1 \cap E^2) \cap (U_2 \cap E^2) \cap (U_3 \cap E^2) \cap ...$

$= \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap E^2$

Karena $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right)$ adalah himpunan buka dalam R^3, maka $\bigcap_{i=1}^{n} V_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap E^2$ adalah himpunan buka pada E^2. Oleh karena itu $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$. Jadi (E^2,τ) adalah suatu ruang topologi.

Selanjutnya pengkonstruksian himpunan $\{E_i \mid i\in I\}$.

Misalkan $E_1 = E^2 - \{(0,0,2)\}$

$$= \left\{ (x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \ dan \ z \neq 2 \right\} \quad (4)$$

dan $E_2 = E^2 - \{(0,0,-2)\}$

$$= \left\{ (x,y,z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \ dan \ z \neq -2 \right\} \quad (5)$$

dua domain pada E^2. Oleh karena itu himpunan $\{E_i \mid i\in I\}$ dapat ditulis sebagai $\{E_i \mid i=1, 2\}$.

Selanjutnya pengkonstruksian koleksi fungsi $A=\{f_i \mid i\in I\}$.

Dari persamaan (2), diperoleh $\frac{(x+iy)(x-iy)}{(1-\frac{z}{2})(1+\frac{z}{2})} = 1$. Misalkan $f_1(x,y,z) = \frac{(x+iy)}{(1-\frac{z}{2})}$ dan $f_2(x,y,z)= \frac{(x+iy)}{(1-\frac{z}{2})}$, maka himpunan $A=\{f_i \mid i\in I\}$ dapat ditulis sebagai $A=\{f_i \mid i=1,2\}$.

Selanjutnya diperlihatkan E^2 sebagai ruang topologi Hausdorff yang terhubung.

Misalkan p_1 dan p_2 anggota dari E^2 dengan $p_1 \neq p_2$ dan $p_i = (x, y, z)$. Kemudian definisikan persekitaran p_i untuk $i=1, 2$, sebagai:

$$N(p_i,\varepsilon_i) = \left\{ p \in R^3 \mid \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon_i \right\}$$

dan $N^0(p_i, \varepsilon_i) = N(p_i, \varepsilon_i) \cap E^2$.

Misalkan $d(p_1,p_2) =$

$\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 \right]^{1/2} = \varepsilon_3$ adalah suatu metrik pada ruang Euclid R^3, dan $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid i=1, 2, 3\}$. Definisikan himpunan buka $V_i = N(p, \frac{\varepsilon}{2}) \cap E^2$ untuk $i=1, 2$; akan ditunjukkan bahwa V_1 dan V_2 tidak beririsan. Andaikan V_1 dan V_2 beririsan, yaitu $V_1 \cap V_2 \neq \phi$, maka terdapat $p_3 \in V_1 \cap V_2$ dengan $d(p_1, p_2)<\varepsilon/2$ dan $d(p_2, p_3)< \varepsilon/2$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh $\varepsilon_3<\varepsilon$, tetapi $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i | i=1,2,3\}$. Jadi suatu kontradiksi, sehingga $V_1 \cap V_2 = \phi$. Selanjutnya diperlihatkan bahwa E^2 terhubung. Untuk membuktikan bahwa E^2 terhubung, digunakan definisi dan teorema berikut:

Definisi 2.3. (Abu Osman, 1989)

Misalkan (X,τ) ruang topologi. Maka (X,τ) disebut terhubung secara lintasan jika setiap $p_1,p_2 \in X$ dapat dihubungkan dengan suatu lintasan dalam ruang topologi tersebut.

Teorema 2.4. (Abu Osman, 1989)

Jika (X,τ) terhubung secara lintasan maka (X,τ) terhubung.

Teorema 2.5. (Marsden, 1974)

Misalkan (X,τ) ruang topologi dan $A \subseteq X$. Jika A terhubung dan $f: A \to B$ kontinu, maka $f(A)$ terhubung.

Sekarang kita mulai membuktikan keterhubungan E^2. Kita akan menggunakan koordinat bola untuk membuktikannya.

Komponen-komponen koordinat $P(r,\varphi,\omega)$ dinyatakan sebagai: r = jarak dari P ke titik pusat; φ = sudut dari sumbu-x positif ke garis OQ; ω = sumbu-z positif ke garis OP. Sehingga diperoleh hubungan $x=r\sin\omega\cos\varphi$, $y=r\sin\omega\sin\varphi$, $z=r\cos\omega$. Hubungan-hubungan tersebut disubtitusi ke (2) dan diperoleh $r = \frac{2}{\sqrt{3\sin^2\omega + 1}}$.

Misalkan $P_x = \left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\omega_x + 1}}, \varphi_x, \omega_x \right)$ dan $P_y = \left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\omega_y + 1}}, \varphi_y, \omega_y \right)$ adalah sebarang dua titik pada E^2. Definisikan suatu fungsi $f: [0,1] \to R^3$ dengan

$$f(n) = \left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x + n\omega_y] + 1}}, (1-n)\varphi_x + n\varphi_y, (1-n)\omega_x + n\omega_y \right)$$

Akan ditunjukkan bahwa $f(n)\in E^2$ untuk setiap $n\in[0,1]$. Dengan menggunakan definisi $f(n)$ dan hubungan-hubungan $x=r\sin\psi\cos\varphi$, $y=r\sin\psi\sin\varphi$, $z=r\cos\psi$, maka diperoleh:

$$x = \frac{2\sin[(1-n)\omega_x + n\omega_y]\cos[(1-n)\varphi_x + n\varphi_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x + n\varphi_y] + 1}};$$

$$y = \frac{2\sin[(1-n)\omega_x + n\omega_y]\sin[(1-n)\varphi_x + n\varphi_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x + n\varphi_y] + 1}}$$ dan

$z = \frac{2\cos[(1-n)\omega_x + n\omega_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x + n\varphi_y] + 1}}$. Jika hubungan-hubungan ini disubtitusi ke $\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \right)$, maka diperoleh $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$. Dengan menggunakan Definisi 2.3, maka E^2 terhubung secara lintasan, dan dengan Teorema 2.6, maka E^2 terhubung.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa E^2 homeomorfisma dari domain E_i ke subset terbuka D_i pada bidang kompleks C untuk $i=1,2$. E_i disebut domain jika terbuka dan terhubung $i=1,2$ (Akhmad T, 1989). Diketahui bahwa $E_1=E^2-\{(0,0,2)\}$. Misalkan $k\in E_1$, maka jelas $k\neq(0,0,2)$ dan $d(k,(0,0,2))<r$ dengan $r>0$. Kemudian diperoleh bahwa $N(k,r)=\{p\in E^2 \mid d(k,p)<r\} \subset E_1$ karena jika $(0,0,2)\in N(k,r)$ maka $d(k,(0,0,2))<r$. Ini adalah suatu kontradiksi, sehingga E_1 terbuka. Dengan cara yang sama, diperoleh bahwa E_2 adalah terbuka. Selanjutnya diperlihatkan bahwa E_i $(i=1,2)$ terhubung dengan menggunakan koordinat bola. Komponen-komponen koordinat $P(r,\varphi,\omega)$ dinyatakan sebagai: r = jarak dari P ke titik pusat; φ = sudut dari sumbu-x positif ke garis OQ; ω =

sumbu-z positif ke garis OP, dan diperoleh $r = \frac{2}{\sqrt{3\sin^2\omega+1}}$. Misalkan $P_x = \left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\omega_x+1}}, \varphi_x, \omega_x\right)$

dan $P_y = \left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2\omega_y+1}}, \varphi_y, \omega_y\right)$ adalah sebarang dua titik pada E^2. Definisikan suatu fungsi $g : [0,1] \to R^3$ dengan

$$g(n) = \left(\frac{2}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\omega_y]+1}}, (1-n)\varphi_x+n\varphi_y, (1-n)\omega_x+n\omega_y\right)$$

Akan ditunjukkan bahwa $g(n)\in E^2$ untuk setiap $n\in[0,1]$. Dengan menggunakan definisi $g(n)$ dan hubungan-hubungan $x=r\sin\psi\cos\varphi$, $y=r\sin\psi\sin\varphi$, $z=r\cos\psi$, maka diperoleh:

$$x = \frac{2\sin[(1-n)\omega_x+n\omega_y]\cos[(1-n)\varphi_x+n\varphi_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1}} \quad (6)$$

$$y = \frac{2\sin[(1-n)\omega_x+n\omega_y]\sin[(1-n)\varphi_x+n\varphi_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1}} \quad (7)$$

dan $z = \frac{2\cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1}}$. (8)

Diketahui dari (4) bahwa $E_1 = E^2 - \{(0,0,2)\}$

$= \left\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \text{ dan } z\neq 2\right\}$.

Dengan menggunakan (6), (7) dan (8) terlihat bahwa $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$. Selanjutnya diperlihatkan bahwa:

$z = \frac{2\cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1}} \neq 2$. Andaikan z=2, maka

$\frac{2\cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1}} = 2$, sehingga diperoleh:

$$\frac{4\cos^2[(1-n)\omega_x+n\omega_y]}{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2[(1-n)\omega_x+n\omega_y]}{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y] = \pm 1 \quad (9)$$

Karena z=2, maka $\cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y]=1$, berarti bahwa $(1-n)\omega_x+n\omega_y = \cos^{-1}1$=0 dan 2π. Jika $(1-n)\omega_x+n\omega_y$=0 maka $(1-n)\omega_x = -n\omega_y$. Diketahui bahwa $(1-n)\omega_x = -n\omega_y$ jika dan hanya jika $\omega_x=\omega_y=0$. Ini adalah suatu kontradiksi karena $\omega_i > 0$ untuk i=x, y. Jadi seharusnya $(1-n)\omega_x+n\omega_y \neq 0$, sehingga $(1-n)\omega_x+n\omega_y \neq 2\pi$ (karena cos0=cos2π=1). Dengan demikian $\cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y]\neq 1$. Jadi $z = \frac{2\cos[(1-n)\omega_x+n\omega_y]}{\sqrt{3\sin^2[(1-n)\omega_x+n\varphi_y]+1}} \neq 2$, sehingga $g(n)\in E_1$, $\forall n\in[0,1]$. Dengan menggunakan Definisi 2.3, maka E_1 terhubung secara lintasan, dan dengan Teorema 2.4, maka E_1 terhubung. Dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa E_2 adalah terhubung. Karena E_i terbuka dan terhubung, maka E_i merupakan domain f_i untuk i=1,2.

Misalkan $f_i : E_i \to D_i$ dengan $f_i(x_i,y_i,z_i)$ = $\frac{(x+iy_i)}{(1-\frac{z_i}{2})} \in D_i$ untuk $(x_i,y_i,z_i)\in E_i$; i=1,2. Dapat diperlihatkan bahwa $D_i = C$ (C adalah bidang kompleks). Karena C terbuka maka D_i merupakan range terbuka f_i untuk i=1,2.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa f_i merupakan homeomorfisma dari E_i ke D_i untuk i=1,2 dengan memperlihatkan bahwa $f_i : E_i \to D_i$ adalah bijektif, terbuka dan kontinu serta E_i dan D_i merupakan ruang topologi. E_i dan D_i dapat diperlihatkan sebagai ruang topologi dengan menggunakan cara yang sama pada E^2, dan f_i dapat diperlihatkan sebagai fungsi yang bijektif, terbuka dan kontinu dengan menggunakan sifat-sifat pada E_i dan D_i. Sehingga dapat disimpulkan bahwa E_i dan D_i adalah homeomorfisma.

Terakhir, dibuktikan bahwa setiap fungsi transisi yang didefinisikan merupakan holomorfi.

Misalkan didefinisikan fungsi:

$t_{21} : f_1(E_1\cap E_2) \to f_2(E_1\cap E_2)$ sebagai fungsi transisi dengan $t_{21} : f_2(f_1^{-1})$ atau $t_{12} : f_2(E_1\cap E_2) \to f_1(E_1\cap E_2)$ sebagai fungsi transisi dengan $t_{12} : f_1(f_2^{-1})$.

$f_1(x,y,z)f_2(x,y,z)$=$\left(\frac{x+iy}{1-\frac{z}{2}}\right)\left(\frac{x-iy}{1+\frac{z}{2}}\right)$=1, sehingga $f_1(x,y,z)$= $\frac{1}{f_2(x,y,z)}$ dan $f_2(x,y,z)$= $\frac{1}{f_1(x,y,z)}$. Jelas bahwa t_{21} dan t_{12} merupakan pemetaan pada C-{0} dengan $s\to\frac{1}{s}$ dan s=a+ib, sehingga $t_{21}(s) = f_2(f_1^{-1})(s) = \frac{1}{a+ib}$

$= \frac{1}{a+ib}\left(\frac{a-ib}{a-ib}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} + -i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$= u + iv$.

Selanjutnya,

$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{-2ab}{(a^2+b^2)^2}$;

$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$; $\frac{\partial v}{\partial b} = \frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}$, sehingga diperoleh:

$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial b}$ dan $\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{\partial v}{\partial a}$. Jadi t_{21} merupakan holomorfi. Dengan cara yang sama, dapat diperlihatkan bahwa t_{12} adalah holomorfi.

III. PENUTUP

Kita telah membuktikan bahwa E^2 adalah suatu ruang topologi dengan koleksi fungsi $A=\{f_i \mid i\in I\}$ dan memenuhi syarat-syarat berikut:

1) E^2 merupakan ruang topologi Hausdorff yang terhubung.
2) Setiap f_i merupakan homeomorfisma dari domain E_i ke himpunan bagian terbuka D_i pada bidang kompleks C.
3) $\{E_i \mid i\in I\}$ merupakan tudung terbuka untuk E^2.
4) Setiap fungsi transisi yang didefinisikan merupakan holomorfi.

Dengan demikian bentuk elips E^2 memenuhi struktur permukaan Reimann.

PUSTAKA

[1] Abu Osman (1989). *Topologi*. Kuala Lumpur: Dewan Bahasa dan Pustaka.

[2] Akhmad, T. (1984). *The Reimann Surface: S^2* (*sphere*). California State University: Tesis Master.

[3] Liau Li Yun (2002). *Homeomorfisma antara Sfera dan Elips melalui Struktur Permukaan Reimann serta Deduksi Pembuktiannya Bagi Homeomorfisma FTTM*. UTM Johor: Tesis Master.

[4] Marsden, J.E. (1974). *Elementary Classical Analisys*. San Fransisco: W.H. Freeman.

[5] Thomas, G.B and Finney, R.L. (1996). *Calculus* 9th ed. USA: Addison-Wesley Publishing Company.