Jurnal Sainsmat, September 2023, Halaman 153 - 169 Vol. XII, No. 2
ISSN 2579-5686 (Online) ISSN 2086-6755
http://ojs.unm.ac.id/index.php/sainsmat

Bilangan Terhubung Total Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Buku(B_n) dan Graf Pensil(Pc_m)

Total Rainbow Connection Number of Corona Product of Book Graph(B_n) and Pencil Graf(Pc_m)

Randi Mooduto[1)*], Lailany Yahya[2)], Nisky Imansyah Yahya[3)]

[1,2,3)] Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo

ABSTRAK

Misalkan G adalah graf sederhana dan terbatas. Pewarnaan pelangi dan pewarnaan total pelangi c didefinisikan c : G → {1,2,. . . , k} dengan k merupakan minimal warna pada graf G. Bilangan terhubung pelangi(rc) merupakan penentuan pola dengan memberikan warna yang berbeda pada sisi(E(G)) saling terhubung sehingga terbentuk lintasan pelangi. Bilangan terhubung total pelangi(trc) merupakan penentuan pola dengan memberikan warna pada titik(V(G)) dan sisi(E(G)) pada graf G sehingga terbentuk lintasan total pelangi. Artikel ini membahas tentang bilangan terhubung pelangi(rc) dan bilangan terhubung total pelangi(trc) pada graf hasil operasi korona graf buku(Bn) dan graf pensil(Pcm). Hasil yang diperoleh rc(Bn ⊙ Pcm) = 2n+3 dan trc(Bn ⊙ Pcm) = 4n+5, 3 ≤ n ≤ 5.

Kata kunci: Bilangan Terhubung Total Pelangi, Bilangan Terhubung Pelangi, Operasi Korona, Graf Buku, Graf Pensil.

ABSTRACT

Let G be a simple and finite graph. Rainbow connection and total rainbow connection c are set c : G → {1,2,. . . , k} where k is the minimal color on graph G. A rainbow connection number(rc) is a pattern by giving different colors to the connection edges (E(G)) so that a rainbow path is formed. The total rainbow connection number (trc) is a payment pattern by giving color to vertices (V(G)) and edges (E(G)) in graph G so that a total rainbow path is formed. This article discusses rainbow connection numbers (rc) and total rainbow connection numbers (trc) in the corona graph of book graph (Bn) and pencil graph (Pcm). The results obtained are rc(Bn ⊙ Pcm) = 2n+3 and trc(Bn ⊙ Pcm) = 4n+5, 3 ≤ n ≤ 5.

Keywords: Total Rainbow Connection Number, Rainbow Connection Number, Corona Operation, Book Graph, Pencil Graph.

* *Korespondensi:*
email: randimooduto.ung@gmail.com

PENDAHULUAN

Setiap permasalahan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari harus diselesaikan dengan solusi terbaik. Beberapa permasalahan yang ada biasanya melibatkan berbagai faktor kehidupan yang beragam. Oleh karena itu, bidang matematika yang merupakan salah satu perkembangan dari ilmu pengetahuan sangat dibutuhkan (Marcellina dkk., 2022). Ilmu matematika dapat diaplikasikan sebagai solusi pada permasalahan-permasalahan yang ada, salah satunya adalah teori graf (Munir, 2010).

Teori graf awal mula diterapkan tahun 1736. Saat itu, muncul suatu permasalahan bagaimana jika seseorang ingin melewati semua jembatan dengan syarat tidak bisa melewati jembatan yang telah dilewati sebelumnya. Selanjutnya permasalahan tersebut menimbulkan ketertarikan bagi Euler untuk mengatasi hal tersebut dengan menggunakan model yang dimuat dalam graf. Topik yang sering dimuat dalam teori graf salah satunya yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf direpresentasikan oleh titik dan sisi beserta himpunan anggota bilangan asli yang disebut label. Terdapat tiga jenis pelabelan pada sebuah graf (G) diantaranya pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total (Imelda & Martini, 2022).

Pelabelan graf memiliki suatu kasus khusus yaitu pewarnaan graf. Pemberian warna pada suatu elemen yang berdekatan memiliki warna yang berbeda disebut pewarnaan graf. Pewarnaan graf terdiri atas tiga jenis pewarnaan, yaitu pewarnaan titik (vertex coloring), pewarnaan sisi (edge coloring), dan pewarnaan wilayah (Marcellina et al., 2022). Pewarnaan titik yaitu memberikan warna pada titik, pewarnaan sisi yaitu memberikan warna pada sisi, pewarnaan wilayah yaitu memberikan warna pada area suatu wilayah (Azmil & Budayasa, 2022). Pewarnaan graf juga mengalami perkembangan menjadi pewarnaan pelangi. Pemberian warna untuk setiap elemen yang ada dengan warna yang berbeda dan saling terhubung dan terdapat lintasan pelangi disebut pewarnaan pelangi. Pewarnaan pelangi terbagi menjadi tiga jenis pewarnaan yaitu pewarnaan titik pelangi, pewarnaan sisi pelangi, dan pewarnaan total pelangi (Rahmawati et al., 2020). Pewarnaan titik pelangi yaitu dimana setiap titik satu dan titik lainnya yang saling terhubung ditandai dengan warna yang berbeda. Pewarnaan sisi pelangi yaitu memberikan warna pada sisi, dimana setiap dua sisi yang saling terhubung memperoleh warna yang berbeda. Pewarnaan total pelangi adalah memberikan warna secara total pada himpunan graf sehingga membentuk lintasan pelangi.

Teori graf juga memiliki beberapa operasi graf salah satunya operasi korona. Operasi korona merupakan gabungan dari dua graf dengan membuat duplikat G_1sebanyak titik yang ada pada graf G_1 dan menghubungkan semua titik dari salah satu duplikat graf G_2 pada satu titik yang ada pada graf G_1 (Harsya et al., 2014). Beberapa penelitian tentang operasi korona telah dilakukan sebelumnya oleh Lihawa (Lihawa et al., 2022) yang meneliti tentang operasi korona pada graf prisma dan graf lintasan, dan penelitan lainnya dilakukan oleh humulungo yang meneliti tentang operasi korona pada graf anti prisma dan graf lengkap (Humolungo et al., 2022).

Bilangan terhubung pelangi Merupakan salah satu topic yang sering dikaji dalam penelitian tentang teori graf. Bilangan terhubung sisi pelangi merupakan penentuan pola pada sisi dengan menggunakan minimum k warna pada setiap lintasan graf G sehingga terbentuk lintasan Pelangi (Chartrand et al., 2008). Penelitian sebelumnya tentang bilangan terhubung pelangi diantaranya penelitian yang dilakukan oleh humulungo yaitu tentang penentuan bilangan terhubung pelangi dengan menggunakan salah satu operasi graf (Humolungo et al., 2022) dan penelitian oleh Doan yang mengkaji tentang bilangan terhubung pelangi (Doan & Schiermeyer, 2021).

Bilangan terhubung pelangi juga mengalami perkembangan yaitu bilangan terhubung total Pelangi. Bilangan terhubung total pelangi merupakan penentuan pola pada titik dan sisi dengan menggunakan minimum k warna pada setiap lintasan graf G sehingga terbentuk lintasan pelangi total (Liu et al., 2014). Bilangan terhubung total pelangi diperkenalkan oleh ucizawa dkk pada tahun 2014. Penelitian tentang bilangan terhubung total pelangi telah dikaji sebelumnya oleh beberapa peneliti diantaranya Arbaik pada tahun (Arbain, 2018), Rahmawati pada tahun 2020 (Rahmawati et al., 2020), dan Sigar pada tahun 2020 (Sigar et al., 2020).

Tahapan penelitian kali ini dilakukan dengan menggunakan operasi korona dari sembarang dua graf G_1 dan graf G_2, diantaranya graf buku (B_n) (Gallian, 2021) dan graf pensil (Pc_m) (Simamora & Salman, 2015). Selanjutnya akan ditentukan suatu pewarnaan pelangi dari hasil operasi corona graf buku (B_n) dan graf pensil (Pc_m). Tujuan dari penelitian kali ini adalah menentukan bilangan terhubung total pelangi dari hasil operasi korona graf buku (B_n) dan graf pensil (Pc_m), sehingga akan didapatkan teorema terkait bilangan terhubung total pelangi hasil operasi korona buku (B_n) dan graf pensil (Pc_m). Pada penelitian kali ini diharapkan dapat memperoleh hasil tentang pola terhubung total pelangi sekaligus sebagai bahan acuan atau kontribusi dalam penelitian selanjutnya mengenai bidang yang sama.

METODE

Metode yang dipakai diantaranya studi literature (*library research*), Pengkajian pada buku, jurnal, textbook dan artikel ilmiah mengenai bilangan terhubung total pelangi dengan tujuan memperoleh informasi dan metode yang akan digunakan dalam pembahasan masalah ini. Tahapan yang akan dilakukan pada penelitian kali ini yaitu :

1. Membuat pendefinisian sehingga diperoleh gambar hasil operasi graf buku(B_n) dan graf pensil(Pc_m).
2. Menentukan pola bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung total pelangi sehingga memperoleh teorema baru.
3. Membuktikan teorema bilangan terhubung pelangi dan bilangan terhubung total pelangi berdasarkan gambar pada tahap pertama.
4. Merumuskan kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Graf Hasil Operasi Korona Graf Buku(B_n) dan Graf Pensil(Pc_m)
   Misalkan n dan m merupakan bilangan bulat dengan $3 \leq n \leq 5$ dan $m = 2$. Misalkan graf G merupakan graf hasil operasi korona graf buku(B_n) dan graf pensil(Pc_m). Maka titik($V(G)$) dan sisi($E(G)$) didefinisikan :

$$
\begin{aligned}
V(G) = {} & \{v_i | i \in [1, n+1]\} \cup \{u_i | i \in [1, n+1]\} \cup \\
& \{v_{i,j} | i \in [1, n+1], j \in [1,6]\} \cup \{u_{i,j} | i \in [1, n+1], j \in [1,6]\} \\
E(G) = {} & \{v_i u_i \mid i \in [1, n+1]\} \cup \{v_i v_j \mid i = 1, j \in [2, n+1]\} \cup \\
& \{v_i v_{i,j} \mid i \in [1, n+1], j \in [1,6]\} \cup \{u_i u_j \mid i = 1, j \in [2, n+1]\} \cup \\
& \{u_i u_{i,j} \mid i \in [1, n+1], j \in [1,6]\} \cup \\
& \{v_{i,j} v_{i,k} | i \in [1, n+1], j \in [1,5], k = j+1\} \cup \\
& \{v_{i,6} v_{i,1}, v_{i,1} v_{i,4}, v_{i,2} v_{i,6}, v_{i,3} v_{i,5} | i \in [1, n+1]\} \cup \\
& \{u_{i,j} u_{i,k} | i \in [1, n+1], j \in [1,5], k = j+1\} \cup \\
& \{u_{i,6} u_{i,1}, u_{i,1} u_{i,4}, u_{i,2} u_{i,6}, u_{i,3} u_{i,5} | i \in [1, n+1]\} \cup
\end{aligned}
$$

2. Bilangan Terhubung Pelangi
   Teorema 1. Jika n merupakan bilangan bulat dengan $3 \leq n \leq 5$ dan $G \cong (B_n \odot Pc_2)$, maka

$$rc(G) = 2n + 3$$

Bukti. Berdasarkan teorema (Chartrand et al., 2008) diketahui bahwa rc(G) ≥ diam(G). Apabila $rc(G) \geq diam(G)$ cukup ditunjukkan terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, rc(G)\}$. Sedangkan jika $rc(G) > diam(G)$ perlu dibuktikan dengan kontradiksi. Oleh karena itu untuk membuktikan teorema 1 perlu dibuktikan dengan kontradiksi karena $rc(G) > diam(G)$.

Kasus 1. $diam(G) = 5, n = 3$

Diketahui $rc(G) > 5$, Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rc \geq 2n + 3$. Andaikan $rc \leq 2n + 2$ maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan sisi pelangi $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, 2n + 2\}$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinisikan pewarnaan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{ll}
c(v_{i,1} v_{i,2}) = c(v_{i,1} v_{i,6}) = c(v_{i,2} v_{i,6}) = i & i \in [1,4] \\
c(v_{i,3} v_{i,4}) = c(v_{i,3} v_{i,5}) = c(v_{i,4} v_{i,5}) = i & i \in [1,4] \\
c(v_{i,1} v_{i,4}) = c(v_{i,2} v_{i,3}) = c(v_{i,5} v_{i,6}) = i + 4 & i \in [1,4] \\
c(v_i v_{i,j}) = i & i \in [1,4], j \in [1,6] \\
c(v_i v_j) = i + 4 & i \in [1,4], j \in [2,4] \\
c(u_{i,1} u_{i,2}) = c(u_{i,1} u_{i,6}) = c(u_{i,2} u_{i,6}) = i & i \in [1,4] \\
c(u_{i,3} u_{i,4}) = c(u_{i,3} u_{i,5}) = c(u_{i,4} u_{i,5}) = i & i \in [1,4] \\
c(u_{i,1} u_{i,4}) = c(u_{i,2} u_{i,3}) = c(u_{i,5} u_{i,6}) = i + 4 & i \in [1,4]
\end{array}
$$

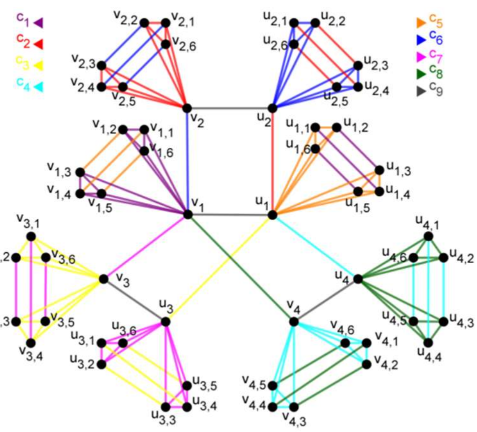
$$c(u_i u_{i,j}) = i \qquad i \in [1,4], j \in [1,6]$$
$$c(u_i u_j) = i + 4 \qquad i \in [1,4], j \in [2,4]$$
$$c(v_i u_i) = 1,2, \dots ,8 \qquad i \in [1,4]$$

Perhatikan jika $v_i u_i$ diberi warna 1, maka pada lintasan $v_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 2, maka pada lintasan $v_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 3, maka pada lintasan $v_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 4, maka pada lintasan $v_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 5, maka pada lintasan $u_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 6, maka pada lintasan $u_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 7, maka pada lintasan $u_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 8, maka pada lintasan $u_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi.

Karena graf G tidak dapat diwarnai dengan $2n + 2$ warna maka pengandaian salah, haruslah $rc(G) \geq 2n + 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc(G) \geq 2n + 3$ dengan definisi pewarnaan sebagai berikut :

$$c(v_{i,1} v_{i,2}) = c(v_{i,1} v_{i,6}) = c(v_{i,2} v_{i,6}) = i \qquad i \in [1,4]$$
$$c(v_{i,3} v_{i,4}) = c(v_{i,3} v_{i,5}) = c(v_{i,4} v_{i,5}) = i \qquad i \in [1,4]$$
$$c(v_{i,1} v_{i,4}) = c(v_{i,2} v_{i,3}) = c(v_{i,5} v_{i,6}) = i + 4 \qquad i \in [1,4]$$
$$c(v_i v_{i,j}) = i \qquad i \in [1,4], j \in [1,6]$$
$$c(v_i v_j) = i + 4 \qquad i \in [1,4], j \in [2,4]$$
$$c(u_{i,1} u_{i,2}) = c(u_{i,1} u_{i,6}) = c(u_{i,2} u_{i,6}) = i \qquad i \in [1,4]$$
$$c(u_{i,3} u_{i,4}) = c(u_{i,3} u_{i,5}) = c(u_{i,4} u_{i,5}) = i \qquad i \in [1,4]$$
$$c(u_{i,1} u_{i,4}) = c(u_{i,2} u_{i,3}) = c(u_{i,5} u_{i,6}) = i + 4 \qquad i \in [1,4]$$
$$c(u_i u_{i,j}) = i \qquad i \in [1,4], j \in [1,6]$$
$$c(u_i u_j) = i + 4 \qquad i \in [1,4], j \in [2,4]$$
$$c(v_i u_i) = 9 \qquad i \in [1,4]$$

Pewarnaan pada graf hasil operasi korona graf buku(B_3) dan graf pensil(Pc_2) ditampilkan pada gambar 1.



Gambar 1. Pewarnaan Pelangi $rc(B_3 \odot Pc_2)$

Berdasarkan yang ditampilkan dari gambar 1 hasil operasi korona dari kedua graf dan didapatkan bahwa $rc(B_3 \odot Pc_2) = 9$, maka $rc(B_n \odot Pc_m) = 2n + 3$ terbukti.

Kasus 2. $diam(G) = 5, n = 4$

Diketahui $rc(G) > 5$, Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rc \geq 2n + 3$. Andaikan $rc \leq 2n + 2$ maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan sisi pelangi $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \dots, 2n + 2\}$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinisikan pewarnaan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{ll}
c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i & i \in [1,5] \\
c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i & i \in [1,5] \\
c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 5 & i \in [1,5] \\
c(v_i v_{i,j}) = i & i \in [1,5], j \in [1,6] \\
c(v_i v_j) = i + 5 & i \in [1,5], j \in [2,5] \\
c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 5 & i \in [1,5] \\
c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 5 & i \in [1,5] \\
c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i & i \in [1,5] \\
c(u_i u_{i,j}) = i + 5 & i \in [1,5], j \in [1,6] \\
c(u_i u_j) = i & i \in [1,5], j \in [2,5] \\
c(v_i u_i) = 1,2, \dots, 10 & i \in [1,5]
\end{array}
$$

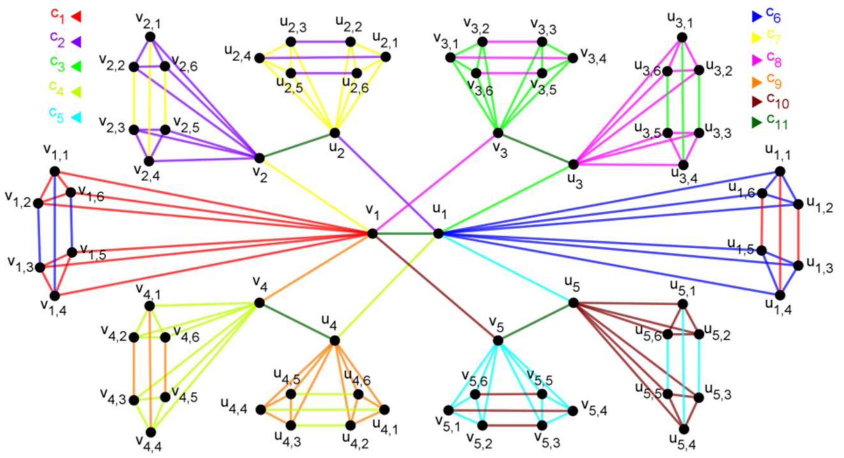
Perhatikan jika $v_i u_i$ diberi warna 1, maka pada lintasan $v_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 2, maka pada lintasan $v_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 3, maka pada lintasan $v_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 4, maka $v_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 5, maka pada lintasan $v_{5,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 6, maka pada lintasan $u_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 7, maka pada lintasan $u_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 8, maka pada lintasan $u_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 9, maka pada lintasan $u_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 10, maka pada lintasan $u_{5,1} - v_i u_i$ tidak pelangi.

Karena graf G tidak dapat diwarnai dengan $2n + 2$ warna maka pengandaian salah, haruslah $rc(G) \geq 2n + 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc(G) \geq 2n + 3$ dengan definisi pewarnaan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{ll}
c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i & i \in [1,5] \\
c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i & i \in [1,5] \\
c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 5 & i \in [1,5] \\
c(v_i v_{i,j}) = i & i \in [1,5], j \in [1,6] \\
c(v_i v_j) = i + 5 & i \in [1,5], j \in [2,5] \\
c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 5 & i \in [1,5] \\
c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 5 & i \in [1,5] \\
c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i & i \in [1,5]
\end{array}
$$

$c(u_iu_{i,j}) = i + 5$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(u_iu_j) = i$	$i \in [1,5], j \in [2,5]$
$c(v_iu_i) = 11$	$i \in [1,5]$

Pewarnaan pada graf hasil operasi korona graf buku(B_4) dan graf pensil(Pc_2) ditampilkan pada gambar 2.



Gambar 2. Pewarnaan Pelangi $rc(B_4 \odot Pc_2)$

Berdasarkan yang ditampilkan dari gambar 2 hasil operasi korona dari kedua graf dan didapatkan bahwa $rc(B_4 \odot Pc_2) = 11$, maka $rc(B_n \odot Pc_m) = 2n + 3$ terbukti.

Kasus 3. $diam(G) = 5, n = 5$

Diketahui $rc(G) > 5$, Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $rc \geq 2n + 3$. Andaikan $rc \leq 2n + 2$ maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan sisi pelangi $c: E(G) \rightarrow \{1,2, \ldots ,2n + 2\}$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinisikan pewarnaan sebagai berikut :

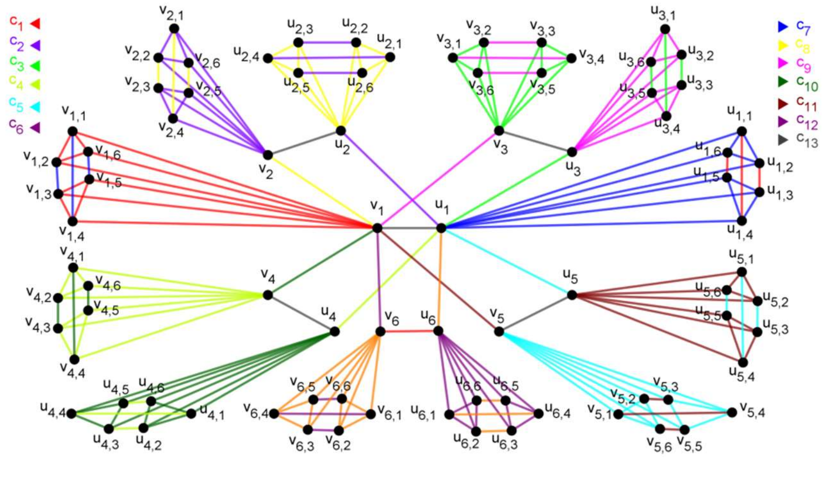
$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 6$	$i \in [1,6]$
$c(v_iv_{i,j}) = i$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(v_iv_j) = i + 6$	$i \in [1,6], j \in [2,6]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 6$	$i \in [1,6]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 6$	$i \in [1,6]$
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i$	$i \in [1,6]$
$c(u_iu_{i,j}) = i + 6$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(u_iu_j) = i$	$i \in [1,6], j \in [2,6]$
$c(v_iu_i) = 1,2, \ldots ,12$	$i \in [1,6]$

Perhatikan jika v_iu_i diberi warna 1, maka pada lintasan $v_{1,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 2, maka pada lintasan $v_{2,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 3, maka pada lintasan $v_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 4, maka pada lintasan $v_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 5, maka pada lintasan $v_{5,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 6, maka pada lintasan $v_{6,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 7, maka pada lintasan $u_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 8, maka pada lintasan $u_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 9, maka pada lintasan $u_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 10, maka pada lintasan $u_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 11, maka pada lintasan $u_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 12, maka pada lintasan $u_{6,1} - v_i u_i$ tidak pelangi.

Karena graf G tidak dapat diwarnai dengan $2n + 2$ warna maka pengandaian salah, haruslah $rc(G) \geq 2n + 3$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $rc(G) \geq 2n + 3$ dengan definisi pewarnaan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{ll}
c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i & i \in [1,6] \\
c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i & i \in [1,6] \\
c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 6 & i \in [1,6] \\
c(v_i v_{i,j}) = i & i \in [1,6], j \in [1,6] \\
c(v_i v_j) = i + 6 & i \in [1,6], j \in [2,4] \\
c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 6 & i \in [1,6] \\
c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 6 & i \in [1,6] \\
c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i & i \in [1,6] \\
c(u_i u_{i,j}) = i + 6 & i \in [1,6], j \in [1,6] \\
c(u_i u_j) = i & i \in [1,6], j \in [2,6] \\
c(v_i u_i) = 13 & i \in [1,6]
\end{array}
$$

Pewarnaan pada graf hasil operasi korona graf buku(B_4) dan graf pensil(Pc_2) ditampilkan pada gambar 3.



Gambar 3. Pewarnaan Pelangi $rc(B_5 \odot Pc_2)$

Berdasarkan yang ditampilkan dari gambar 3 hasil operasi korona dari kedua graf dan didapatkan bahwa $rc(B_5 \odot Pc_2) = 13$, maka $rc(B_n \odot Pc_m) = 2n + 3$ terbukti.

3. Bilangan Terhubung Total Pelangi

Teorema 2. Jika n merupakan bilangan bulat dengan $3 \leq n \leq 5$ dan $G \cong (B_n \odot Pc_2)$, maka

$$trc(G) = 4n + 5$$

Bukti. Berdasarkan teorema (Liu et al., 2014) diketahui bahwa $trc \geq 2diam(G) - 1$. Apabila $trc \geq 2diam(G) - 1$ cukup ditunjukkan terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan $c: V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \dots, trc(G)\}$. Sedangkan jika $trc > 2diam(G) - 1$ perlu dibuktikan dengan kontradiksi. Oleh karena itu untuk membuktikan teorema 2 perlu dibuktikan dengan kontradiksi karena $trc > 2diam(G) - 1$.

Kasus 1. $\mathrm{diam}(\mathrm{G}) = 5$, $\mathrm{n} = 3$

Diketahui $t\mathrm{rc}(\mathrm{G}) > 9$, Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $trc(G) = 4n + 5$. Andaikan $trc(G) \leq 4n + 4$ maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan total pelangi $\mathrm{c} : V(G) \cup \mathrm{E(G)} \to \{1,2, \dots, 4\mathrm{n} + 4\}$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinikan pewarnaan sebagai berikut :

$c(v_{i,j}) = c(u_{i,j}) = 1$	$i \in [1,4], j \in [1,6]$
$c(v_i) = i$	$i \in [1,4]$
$c(v_i) = i + 4$	$i \in [1,4]$
$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i + 8$	$i \in [1,4]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i + 8$	$i \in [1,4]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 12$	$i \in [1,4]$
$c(v_i v_{i,j}) = i + 8$	$i \in [1,4], j \in [1,6]$
$c(v_i v_j) = i + 8$	$i \in [1,4], j \in [2,4]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 12$	$i \in [1,4]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 12$	$i \in [1,4]$
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i + 8$	$i \in [1,4]$
$c(u_i u_{i,j}) = i + 12$	$i \in [1,4], j \in [1,6]$
$c(u_i u_j) = i + 12$	$i \in [1,4], j \in [2,4]$
$c(v_i u_i) = 1,2, \dots ,16$	$i \in [1,4]$

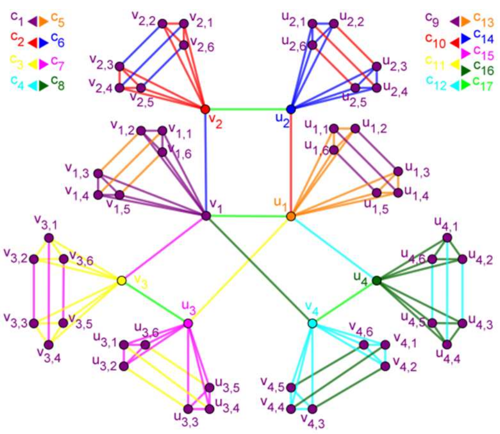
Perhatikan jika $v_i u_i$ diberi warna 1 atau warna 9, maka pada lintasan $v_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 2 atau warna 10, maka pada lintasan $v_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 3 atau warna 11, maka pada lintasan $v_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 4 atau warna 12, maka pada lintasan $v_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 5 atau warna 13, maka pada lintasan $u_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 6 atau warna 14, maka pada lintasan $u_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 7 atau warna 15, maka pada lintasan $u_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 8 atau warna 16, maka pada lintasan $v_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi.

Karena graf G tidak dapat diwarnai dengan $4n + 4$ warna maka pengandaian salah, haruslah $\mathrm{trc}(G) \geq 4n + 5$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathrm{trc}(G) \geq 4n + 5$ dengan definisi pewarnaan sebagai berikut :

$c(v_{i,j}) = c(u_{i,j}) = 1$ $\quad i \in [1,4], j \in [1,6]$
$c(v_i) = i$ $\quad i \in [1,4]$
$c(v_i) = i + 4$ $\quad i \in [1,4]$

$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i + 8$ $\quad i \in [1,4]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i + 8$ $\quad i \in [1,4]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 12$ $\quad i \in [1,4]$
$c(v_iv_{i,j}) = i + 8$ $\quad i \in [1,4], j \in [1,6]$
$c(v_iv_j) = i + 8$ $\quad i \in [1,4], j \in [2,4]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 12$ $\quad i \in [1,4]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 12$ $\quad i \in [1,4]$
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i + 8$ $\quad i \in [1,4]$
$c(u_iu_{i,j}) = i + 12$ $\quad i \in [1,4], j \in [1,6]$
$c(u_iu_j) = i + 12$ $\quad i \in [1,4], j \in [2,4]$
$c(v_iu_i) = 17$ $\quad i \in [1,4]$

Pewarnaan pada graf hasil operasi korona graf buku(B_3) dan graf pensil(Pc_2) ditampilkan pada gambar 4.



Gambar 4. Pewarnaan Total Pelangi $trc(B_3 \odot Pc_2)$

Ilustrasi gambar 4 merupakan hasil pendefinisan dari pewarnaan total pelangi dan berikut uraian dari kondisi dan lintasan pelangi yang disajikan pada tabel 1.

Tabel 1. Lintasan Total Pelangi Graf ($B_3 \odot Pc_2$)

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	$v_{i,k}$	$u_{j,k}$	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_{i-1}u_ju_{j,k}$
			$i = 3, j = \{2,4\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_{i-2}u_ju_{j,k}$
			$i = 4, j = \{2,3\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_{i-3}u_ju_{j,k}$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_ju_{j,k}$
			$i \in [2,4], j = 1, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_ju_{j,k}$
			$i \in [1,4], j = i, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_ju_{j,k}$
2	$v_{i,k}$	$v_{j,l}$	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6], l = k$	$v_{i,k}v_iv_{i-1}v_jv_{j,l}$
			$i = 3, j = 4, k \in [1,6], l = k$	$v_{i,k}v_iv_{i-2}v_jv_{j,l}$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6], l = k$	$v_{i,k}v_iv_jv_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 1, l = \{3,5\}$	$v_{i,k}v_iv_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 4, l = \{2,6\}$	$v_{i,k}v_iv_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = \{2,3\}, l = k + 3$	$v_{i,k}v_iv_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 1, l = \{2,4,6\}$	$v_{i,k}v_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 2, l = \{3,6\}$	$v_{i,k}v_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 3, l = 5$	$v_{i,k}v_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 4, l = \{3,5\}$	$v_{i,k}v_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 5, l = 6$	$v_{i,k}v_{j,l}$
3	$u_{i,k}$	$u_{j,l}$	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6], l = k$	$u_{i,k}u_iu_{i-1}u_ju_{j,l}$
			$i = 3, j = 4, k \in [1,6], l = k$	$u_{i,k}u_iu_{i-2}u_ju_{j,l}$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6], l = k$	$u_{i,k}u_iu_ju_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 1, l = \{3,5\}$	$u_{i,k}u_iu_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 4, l = \{2,6\}$	$u_{i,k}u_iu_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = \{2,3\}, l = k + 3$	$u_{i,k}u_iu_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 1, l = \{2,4,6\}$	$u_{i,k}u_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 2, l = \{3,6\}$	$u_{i,k}u_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 3, l = 5$	$u_{i,k}u_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 4, l = \{3,5\}$	$u_{i,k}u_{j,l}$
			$i \in [1,4], j = i, k = 5, l = 6$	$u_{i,k}u_{j,l}$
4	$v_{i,k}$	v_j	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iv_{i-1}v_j$
			$i = 3, j = 4, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iv_{i-2}v_j$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iv_j$
			$i \in [1,4], j = i, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_j$
5	$u_{i,k}$	u_j	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iu_{i-1}u_j$
			$i = 3, j = 4, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iu_{i-2}u_j$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iu_j$
			$i \in [1,4], j = i, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_j$
6	$v_{i,k}$	u_j	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_{i-1}u_j$
			$i = 3, j = \{2,4\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_{i-2}u_j$
			$i = 4, j = \{2,3\}, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_{i-3}u_j$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_j$

No	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
			$i \in [2,4], j = 1, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_iu_j$
			$i \in [1,4], j = i, k \in [1,6]$	$v_{i,k}v_iu_j$
7	$u_{i,k}$	v_j	$i = 2, j = \{3,4\}, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iv_iv_{i-1}v_j$
			$i = 3, j = \{2,4\}, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iv_iv_{i-2}v_j$
			$i = 4, j = \{2,3\}, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iv_iv_{i-3}v_j$
			$i = 1, j \in [2,4], k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iv_iv_j$
			$i \in [2,4], j = 1, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iv_iv_j$
			$i \in [1,4], j = i, k \in [1,6]$	$u_{i,k}u_iv_j$
8	v_i	v_j	$i = 2, j = \{3,4\}$	$v_iv_iv_{i-1}v_j$
			$i = 3, j = 4$	$v_iv_iv_{i-2}v_j$
			$i = 1, j \in [2,4]$	$v_iv_iv_j$
9	u_i	u_j	$i = 2, j = \{3,4\}$	$u_{i,k}u_iu_{i-1}u_j$
			$i = 3, j = 4$	$u_{i,k}u_iu_{i-2}u_j$
			$i = 1, j \in [2,4]$	u_iu_j
10	v_i	u_j	$i = 2, j = \{3,4\}$	$v_iu_iu_{i-1}u_j$
			$i = 3, j = \{2,4\}$	$v_iu_iu_{i-2}u_j$
			$i = 4, j = \{2,3\}$	$v_iu_iu_{i-3}u_j$
			$i = 1, j \in [2,4]$	$v_iu_iu_j$
			$i \in [2,4], j = 1$	$v_iu_iu_j$
			$i \in [1,4], j = i$	v_iu_j

Berdasarkan yang ditampilkan dari gambar 4 dan tabel 1 hasil operasi korona dari kedua graf dan didapatkan bahwa $trc(B_3 \odot Pc_2) = 17$, maka $trc(B_n \odot Pc_m) = 4n + 5$ terbukti.

Kasus 2. $\mathrm{diam(G)} = 5, \mathrm{n} = 4$

Diketahui $trc(\mathrm{G}) > 9$, Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $trc(G) = 4n + 5$. Andaikan $trc(G) \leq 4n + 4$ maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan total pelangi $\mathrm{c} : V(G) \cup \mathrm{E(G)} \rightarrow \{1,2, \ldots, 4\mathrm{n} + 4\}$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinikan pewarnaan sebagai berikut :

$c(v_{i,j}) = c(u_{i,j}) = 1$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(v_i) = i$	$i \in [1,5]$
$c(v_i) = i + 5$	$i \in [1,5]$
$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i + 10$	$i \in [1,5]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i + 10$	$i \in [1,5]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 15$	$i \in [1,5]$
$c(v_iv_{i,j}) = i + 10$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(v_iv_j) = i + 10$	$i \in [1,5], j \in [2,5]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 15$	$i \in [1,5]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 15$	$i \in [1,5]$

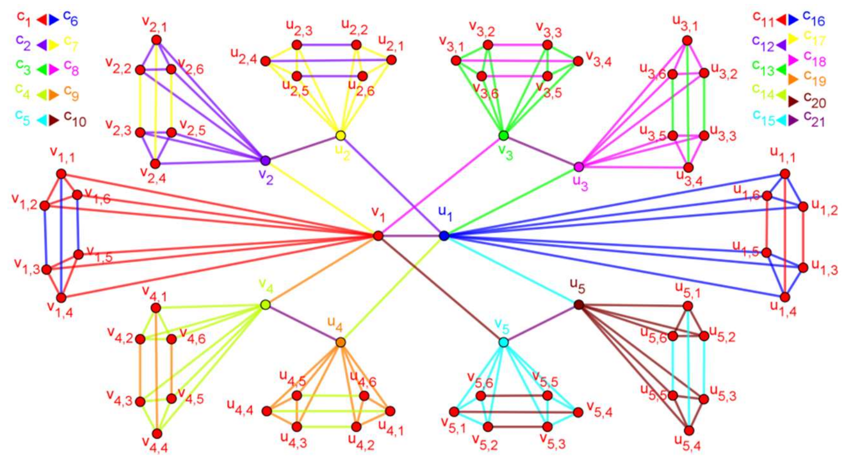
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i + 10$	$i \in [1,5]$
$c(u_i u_{i,j}) = i + 15$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(u_i u_j) = i + 15$	$i \in [1,5], j \in [2,5]$
$c(v_i u_i) = 1,2, \dots ,20$	$i \in [1,5]$

Perhatikan jika $v_i u_i$ diberi warna 1 atau warna 11, maka pada lintasan $v_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 2 atau warna 12, maka pada lintasan $v_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 3 atau warna 13, maka pada lintasan $v_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 4 atau warna 14, maka pada lintasan $v_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 5 atau warna 15, maka pada lintasan $v_{5,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 6 atau warna 16, maka pada lintasan $u_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 7 atau warna 17, maka pada lintasan $u_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 8 atau warna 18, maka pada lintasan $u_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 9 atau warna 19, maka pada lintasan $u_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 10 atau warna 20, maka pada lintasan $u_{5,1} - v_i u_i$ tidak pelangi.

Karena graf G tidak dapat diwarnai dengan $4\mathrm{n} + 4$ warna maka pengandaian salah, haruslah $\mathrm{trc(G)} \geq 4\mathrm{n} + 5$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathrm{trc(G)} \geq 4\mathrm{n} + 5$ dengan definisi pewarnaan sebagai berikut :

$c(v_{i,j}) = c(u_{i,j}) = 1$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(v_i) = i$	$i \in [1,5]$
$c(v_i) = i + 5$	$i \in [1,5]$
$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i + 10$	$i \in [1,5]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i + 10$	$i \in [1,5]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 15$	$i \in [1,5]$
$c(v_i v_{i,j}) = i + 10$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(v_i v_j) = i + 10$	$i \in [1,5], j \in [2,5]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 15$	$i \in [1,5]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 15$	$i \in [1,5]$
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i + 10$	$i \in [1,5]$
$c(u_i u_{i,j}) = i + 15$	$i \in [1,5], j \in [1,6]$
$c(u_i u_j) = i + 15$	$i \in [1,5], j \in [2,5]$
$c(v_i u_i) = 21$	$i \in [1,5]$

Pewarnaan pada graf hasil operasi korona graf buku(B_4) dan graf pensil(Pc_2) ditampilkan pada gambar 5.



Gambar 4. Pewarnaan Total Pelangi $trc(B_4 \odot Pc_2)$

Berdasarkan yang ditampilkan dari gambar 4 hasil operasi korona dari kedua graf dan didapatkan bahwa $trc(B_4 \odot Pc_2) = 21$, maka $trc(B_n \odot Pc_m) = 4n + 5$ terbukti.

Kasus 3. $\text{diam}(G) = 5$, $n = 3$

Diketahui $trc(G) > 9$, Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa $trc(G) = 4n + 5$. Andaikan $trc(G) \leq 4n + 4$ maka terdapat c yang merupakan suatu pewarnaan total pelangi $c : V(G) \cup E(G) \to \{1,2, \dots ,4n + 4\}$. Tanpa mengurangi keumuman, didefinikan pewarnaan sebagai berikut :

$c(v_{i,j}) = c(u_{i,j}) = 1$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(v_i) = i$	$i \in [1,6]$
$c(v_i) = i + 6$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i + 12$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i + 12$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 18$	$i \in [1,6]$
$c(v_iv_{i,j}) = i + 12$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(v_iv_j) = i + 12$	$i \in [1,6], j \in [2,6]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 18$	$i \in [1,6]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 18$	$i \in [1,6]$
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i + 12$	$i \in [1,6]$
$c(u_iu_{i,j}) = i + 18$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(u_iu_j) = i + 18$	$i \in [1,6], j \in [2,6]$
$c(v_iu_i) = 1,2, \dots ,24$	$i \in [1,6]$

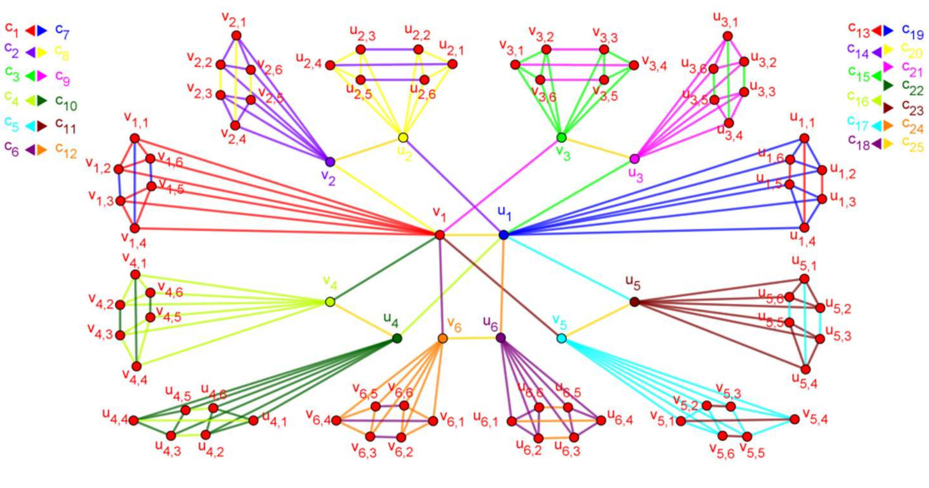
Perhatikan jika v_iu_i diberi warna 1 atau warna 13, maka pada lintasan $v_{1,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 2 atau warna 14, maka pada lintasan $v_{2,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 3 atau warna 15, maka pada lintasan $v_{3,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 4 atau warna 16, maka pada lintasan $v_{4,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 5 atau warna 17, maka pada lintasan $v_{5,1} - v_iu_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 6 atau warna 18, maka pada lintasan $v_{6,1} - v_iu_i$

tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 7 atau warna 19, maka pada lintasan $u_{1,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 8 atau warna 20, maka pada lintasan $u_{2,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 9 atau warna 21, maka pada lintasan $u_{3,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 10 atau warna 22, maka pada lintasan $u_{4,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 11 atau warna 23, maka pada lintasan $u_{5,1} - v_i u_i$ tidak pelangi. Kemudian jika diberi warna 12 atau warna 24, maka pada lintasan $u_{6,1} - v_i u_i$ tidak pelangi.

Karena graf G tidak dapat diwarnai dengan $4\mathrm{n} + 4$ warna maka pengandaian salah, haruslah $\mathrm{trc(G)} \geq 4\mathrm{n} + 5$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathrm{trc(G)} \geq 4\mathrm{n} + 5$ dengan definisi pewarnaan sebagai berikut :

$c(v_{i,j}) = c(u_{i,j}) = 1$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(v_i) = i$	$i \in [1,6]$
$c(v_i) = i + 6$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,1}v_{i,2}) = c(v_{i,1}v_{i,6}) = c(v_{i,2}v_{i,6}) = i + 12$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,3}v_{i,4}) = c(v_{i,3}v_{i,5}) = c(v_{i,4}v_{i,5}) = i + 12$	$i \in [1,6]$
$c(v_{i,1}v_{i,4}) = c(v_{i,2}v_{i,3}) = c(v_{i,5}v_{i,6}) = i + 18$	$i \in [1,6]$
$c(v_i v_{i,j}) = i + 12$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(v_i v_j) = i + 12$	$i \in [1,6], j \in [2,6]$
$c(u_{i,1}u_{i,2}) = c(u_{i,1}u_{i,6}) = c(u_{i,2}u_{i,6}) = i + 18$	$i \in [1,6]$
$c(u_{i,3}u_{i,4}) = c(u_{i,3}u_{i,5}) = c(u_{i,4}u_{i,5}) = i + 18$	$i \in [1,6]$
$c(u_{i,1}u_{i,4}) = c(u_{i,2}u_{i,3}) = c(u_{i,5}u_{i,6}) = i + 12$	$i \in [1,6]$
$c(u_i u_{i,j}) = i + 18$	$i \in [1,6], j \in [1,6]$
$c(u_i u_j) = i + 18$	$i \in [1,6], j \in [2,6]$
$c(v_i u_i) = 25$	$i \in [1,6]$

Pewarnaan pada graf hasil operasi korona graf buku(B_5) dan graf pensil(Pc_2) ditampilkan pada gambar 6.



Gambar 6. Pewarnaan Total Pelangi $trc(B_5 \odot Pc_2)$

Berdasarkan yang ditampilkan dari gambar 6 hasil operasi korona dari kedua graf dan didapatkan bahwa $trc(B_5 \odot Pc_2) = 25$, maka $trc(B_n \odot Pc_m) = 4n + 5$ terbukti.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka diperoleh teorema dari graf hasil operasi korona graf buku(B_n) dan graf pensil(Pc_m) dengan $3 \leq n \leq 5$ dan $m = 2$.

1. Bilangan Terhubung Pelangi
   Jika n merupakan bilangan bulat dengan $3 \leq n \leq 5$ dan $G \cong (B_n \odot Pc_2)$, maka
   $$rc(G) = 2n + 3$$
2. Bilangan Terhubung Total Pelangi
   Jika n merupakan bilangan bulat dengan $3 \leq n \leq 5$ dan $G \cong (B_n \odot Pc_2)$, maka
   $$trc(G) = 4n + 5$$

DAFTAR PUSTAKA

Arbain, A. (2018). Bilangan Terhubung-Total Pelangi untuk Beberapa Graf Amalgamasi. *SAINTIFIK*, *4*, 1–6.

Azmil, S. R. A., & Budayasa, I. K. (2022). Bilangan Keterhubungan Pelangi Sejati Dari Graf. *MATH UNESA*, *10*, 1–10.

Chartrand, G., Johns, G. L., Valley, S., McKeon, K. A., London, N., & Zhang, P. (2008). *Rainbow Connection In Graphs*. Mathematica Bohemica, *133*, 85-98.

Doan, T. D., & Schiermeyer, I. (2021). Proper Rainbow Connection Number of Graphs. *Discussiones Mathematicae - Graph Theory*, *41*(3), 809–826. https://doi.org/10.7151/dmgt.2326

Gallian, J. A. (2021). *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. In *the electronic journal of combinatorics*.

Harsya, A. Y., Agustin, I. H., & Dafik, D. (2014). Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Sikel dengan Graf Lintasan. *FMIPA UNEJ*, 1–8.

Humolungo, K. N., Ismail, S., Hasan, I. K., & Yahya, N. I. (2022). Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Antiprisma (APm) dan Graf Lengkap (K4). *Jurnal Matematika UNAND*, *11*(2), 112. https://doi.org/10.25077/jmua.11.2.112-123.2022

Imelda, G. M., & Martini, T. S. (2022). Pelabelan Total Sisi *Trimagic* Super pada Graf Bunga CmSn. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, *5*, 834–841. https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/

Lihawa, I., Ismail, S., Hasan, I. K., Yahya, L., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2022). Bilangan Terhubung Titik Pelangi pada Graf Hasil Operasi Korona Graf Prisma dan Graf Lintasan. *Jambura Journal of Mathematics*, *4*, 145–151. https://doi.org/10.34312/jjom.v4i1.11826

Liu, H., Mestre, Â., & Sousa, T. (2014). Total rainbow k-connection in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *174*, 92–101. https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.04.012

Marcellina, M., Bangkit, N., & Rahadjeng, B. (2022). Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, daqn Graf Sapu. *MATH UNESA*, *10*(Dekomposisi Graf), 1–8.

Munir, R. (2010). *Matematika Disktrit*. INFORMATIKA BANDUNG.

Rahmawati, D., Helmi, H., & Fran, F. (2020). Bilangan Terhubung Total Pelangi pada Graf Garis dan Graf Double Garis dari Graf Sikat. In *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)* (Vol. 09, Issue 2).

Sigar, T., Ismail, S., & Hasan, I. K. (2020). Bilangan Terhubung Pelangi Dan Bilangan Terhubung-Total Pelangi Hasil Operasi Amalgamasi Graf Berlian (Br4) Dan Graf Kipas (F3). *BAREKANG*, *14*, 1–8. https://doi.org/10.30598/xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Simamora, D. N. S., & Salman, A. N. M. (2015). The Rainbow (Vertex) Connection Number of Pencil Graphs. *Procedia Computer Science*, *74*, 138–142. https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.089