

## **Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam Menegasikan Definisi Limit Fungsi**

### *The Errors and Difficulties of Mathematics Education Students of Unismuh in Negating the Definition of Limit of Function*

**Ikhbariaty Kautsar Qadry<sup>1)</sup>, Andi Mulawakkan Firdaus<sup>1)</sup>, Muhammad Darwis M<sup>2)</sup>, Syahrullah Asyari<sup>2)\*</sup>, Rezki Ramdani<sup>1)</sup>**

<sup>1)</sup> Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unismuh Makassar

<sup>2)</sup> Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Matematika FMIPA UNM

*Received 10<sup>th</sup> October 2020 / Accepted 20<sup>th</sup> February 2021*

#### **ABSTRAK**

*Penelitian ini adalah penelitian kualitatif yang bertujuan mengetahui kesalahan dan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika Unismuh dalam menegasikan definisi limit fungsi. Subjek penelitian ini adalah dua orang berkemampuan logika matematika tinggi, mahasiswa Semester II Program Studi Pendidikan Matematika Unismuh Makassar. Penelitian ini menggunakan teknik triangulasi metodologi untuk mengecek keabsahan data, yaitu metode pemberian tes dan wawancara. Oleh karena itu, ada dua instrumen pendukung dalam penelitian ini, yaitu tes, berupa Tes Kemampuan Logika Matematika yang digunakan untuk menjangkau subjek penelitian, dan Tes Kemampuan Menegasikan Definisi Limit Fungsi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dua subjek memiliki kesamaan dan perbedaan. Salah satunya mengalami semua jenis kesalahan dalam prosedur Newman, dan satu yang lain tidak mengalami Transformation Error saja. Kedua subjek penelitian mengalami kesulitan yang sama dalam menghadapi pernyataan berkuantor majemuk. Mereka kesulitan menjustifikasi kuantor dan maknanya, kesulitan menentukan fungsi pernyataannya, dan kesulitan menentukan bagian yang ingin dinegasikan.*

*Kata kunci: kesalahan, kesulitan, negasi, definisi limit fungsi.*

#### **ABSTRACT**

*This is a qualitative research aimed at uncovering the mistakes and difficulties of mathematics education students of Unismuh in negating the definition of limit of function. The research subjects were two students of the second semester of the mathematics education study program of Unismuh with high ability in mathematical logic. This study used a methodological triangulation technique to check the validity of the data. It was to provide the subjects with tests and interviews. There were two supporting instruments in this study, namely, a test such a mathematical logic ability test which was used to select the students to be the research subjects, and a test for investigating their ability to negate the definition of limit of function. The results show*

---

*\*Korespondensi:  
email: syahrullah\_math@unm.ac.id*

*Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam  
Menegasikan Definisi Limit Fungsi*

*that the two subjects have similarities and differences. One of them experiences all the types of Newman errors, and the other one has no transformation error type only. The two subjects experience the same difficulty in dealing with statements with multiple quantifiers. They have difficulty in justifying the quantifier and its meaning. Also, difficulty in finding the function of the statement and justifying the part to negate.*

*Keywords: error, difficulty, negation, definition of limit of function.*

## **PENDAHULUAN**

Matematika adalah bahasa (Bittinger, 1982). Kemampuan menegasikan kalimat matematika ini penting. Letak penting hal ini setidaknya bisa kita lihat dari pernyataan Lewin & Lewin (1993: 17), *“As a first step in our study of mathematical grammar, we look at an important technique that we can use in order to deepen our understanding of mathematical sentences. This technique is to ask ourselves not only what it means to say that a given sentence is true, but also what it would mean to say that the given sentence is not true. The statement that a given sentence is untrue is called the denial or negation, of the sentence.”* Dari pernyataan ini, kita mengetahui bahwa bahasa dalam matematika memiliki tata bahasa tersendiri dan teknik menegasikan adalah langkah penting pertama yang mestinya dimiliki oleh pebelajar matematika dalam studi mereka tentang tata bahasa matematika. Tujuan teknik menegasikan adalah membawa pebelajar matematika memahami secara mendalam kalimat matematika.

Letak penting kemampuan menegasikan kemampuan menegasikan kalimat matematika ternyata begitu strategis. Kemampuan seseorang dalam menegasikan suatu kalimat matematika, ternyata adalah bagian dari indikator kemampuan seseorang dalam memahami kalimat matematika. Masalah yang umum diketahui di kalangan pendidik matematika Unismuh adalah bahwa mahasiswa sulit menegasikan kalimat matematika. Sayangnya, sepanjang pengetahuan penulis, belum ada upaya sistematis selama ini untuk menyelesaikan masalah kesalahan dan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika Unismuh Makassar dalam menegasikan kalimat matematika. Dengan demikian, penelitian ini didasari oleh keinginan untuk mendiagnosis kesalahan dan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika Unismuh Makassar dalam menegasikan kalimat matematika.

Kalimat matematika yang dipilih untuk dinegasikan oleh mahasiswa dalam penelitian ini adalah definisi limit fungsi. Hal ini karena kompleksitas bahasa matematika yang terkandung dalam kalimat matematika ini. Maksudnya, definisi limit fungsi ini adalah pernyataan berkuantor yang menuntut pemahaman mahasiswa akan operasi pada logika atau penghubung kalimat matematika (*sentence connectives*). Sementara itu, secara konseptual, limit fungsi telah lama diterima oleh matematikawan sebagai fondasi kalkulus modern yang mereka pelajari di tahun pertama mereka di universitas.

Berikut ini adalah definisi limit yang akan menjadi fokus perhatian dalam penelitian ini (Varberg dkk, 2007). Definisi inilah yang akan diinvestigasi dari kognisi mahasiswa matematika Unismuh.

## Definisi Limit Fungsi

Misalkan  $f$  adalah fungsi yang terdefinisi pada selang buka yang memuat  $c$  (kemungkinan bisa hanya di kanan-kiri  $c$ ) dan misalkan  $L$  adalah sebarang bilangan real. Pernyataan,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , berarti bahwa  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , sedemikian sehingga,  $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Kajian tentang kemampuan mahasiswa menegaskan, seperti menegaskan definisi limit fungsi dalam suatu kerangka penelitian adalah langkah awal yang penting diambil. Dengan mengetahui kesalahan dan kesulitan mereka, dosen memiliki landasan akademik dan ilmiah untuk mengambil langkah perubahan menuju perbaikan kualitas penyelenggaraan perkuliahan Landasan Matematika (Susilo, 2012) atau Pengantar Dasar Matematika: Logika Matematika dan Teori Himpunan (Seputro, 1992). Ini juga sekaligus sebagai upaya memperbaiki cara berpikir dengan jalan mempelajari logika untuk menertibkan cara berpikir (Widagdo dkk, 2014).

Dampak pengiring yang diharapkan dari penelitian ini adalah semakin baiknya pemahaman mahasiswa akan konsep limit. Bagi orang matematika, konsep limit fungsi adalah isu penting. Pemahaman mahasiswa tentang kalkulus akan sangat berpengaruh terhadap kemampuan mereka mengkaji matakuliah-matakuliah analisis lanjutan, seperti fungsi variabel real, analisis real, analisis fungsi, dan teori ukuran, karena semua matakuliah ini memerlukan kalkulus sebagai prasyarat (Liang, 2016). Selanjutnya, berdasarkan makna analisis menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (2016) dan Mulyadi (2010). Dengan demikian, analisis kesalahan dan kesulitan menegaskan definisi limit fungsi dapat diartikan sebagai upaya penyelidikan terhadap kekeliruan mahasiswa dalam menegaskan definisi limit fungsi dengan mencari tahu apa penyebab kekeliruan itu, serta menyelidiki hambatan mereka yang terdapat dalam penyebab kekeliruan itu.

## METODE

Penelitian ini adalah penelitian kualitatif. Penelitian ini bertujuan mengetahui kesalahan dan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika Unismuh Makassar dalam menegaskan definisi limit fungsi. Maksudnya, untuk memahami secara holistik fenomena yang dialami oleh subjek penelitian pada suatu konteks khusus yang secara alamiah dideskripsikan dalam bentuk kata-kata dan bahasa (Moleong, 2006).

Subjek penelitian ini adalah mahasiswa Semester II Tahun Akademik 2019/2020 Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unismuh Makassar. Subjek penelitian dipilih berdasarkan kemampuan logika matematika mereka. Semua mahasiswa di kelas itu diberikan tes Logika Matematika. Dari hasil tes tersebut mahasiswa dibagi ke dalam tiga kelompok, yakni kemampuan logika matematika tinggi (kemampuan tinggi), kemampuan logika matematika sedang (kemampuan sedang), dan kemampuan logika matematika rendah (kemampuan rendah). Peneliti menetapkan skor tertentu dalam interval  $0 \leq \text{skor} \leq 100$  dengan mengikuti penskoran yang umumnya digunakan.

*Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam Menegasikan Definisi Limit Fungsi*

Mahasiswa dikatakan berkemampuan logika matematika tinggi, apabila memperoleh skor  $\geq 75$ ; berkemampuan logika matematika sedang, apabila memperoleh  $50 \leq \text{skor} < 75$ ; dan berkemampuan logika matematika rendah, apabila memperoleh skor  $< 50$ . Meskipun dalam penelitian ini ada pembagian ke dalam tiga kelompok kemampuan, tetapi fokus dalam tulisan ini adalah menganalisis jenis kesalahan dan kesulitan mahasiswa berkemampuan logika matematika tinggi dalam menegasikan definisi limit fungsi. Asumsi yang mendasarinya adalah bahwa kesalahan dan kesulitan mereka yang berkemampuan tinggi sangat mungkin menjadi kesalahan dan kesulitan mereka yang berkemampuan di bawahnya.

Penting ditegaskan bahwa dalam penelitian ini hanya ada dua subjek penelitian yang dipilih secara purposif, terutama pelaksanaan penelitian dalam masa Pandemi Covid-19. Dua orang yang terjaring sebagai subjek penelitian inilah yang diberikan Tes Kemampuan Menegasikan Definisi Limit Fungsi (TKMD), untuk selanjutnya diwawancarai secara terstruktur. Dengan demikian, untuk mengecek keabsahan data, triangulasi yang digunakan dalam penelitian kualitatif ini adalah triangulasi metodologi dengan tujuan menutupi kelemahan satu metode yang digunakan dengan kelebihan atau kekuatan pada metode lain (Thurmond, 2001). Jika kesimpulan dari tiap metode sama, maka data yang diperoleh itu valid (Mays & Pope, 2000).

Dalam penelitian ini, analisis data berlangsung setelah pengumpulan data. Ketika peneliti telah mengumpulkan data, analisis dilakukan dengan mengikuti tahapan berikut.

1. Mereduksi data. Dalam hal ini, peneliti menyederhanakan data, baik yang diperoleh dari hasil wawancara, maupun dari hasil pekerjaan pada lembar jawaban.
2. Melakukan pemaparan data. Dalam hal ini, memaparkan data yang diperoleh dari kedua subjek penelitian.
3. Menganalisis kesulitan dan kesalahan mahasiswa pendidikan matematika Unismuh dalam menegasikan definisi limit fungsi.

Peneliti menguraikan data dengan memilah informasi dari subjek penelitian menurut jenis kesalahan mereka dalam menegasikan definisi limit fungsi, untuk selanjutnya menginvestigasi jenis kesulitan mereka. Metode analisis kesalahan yang digunakan adalah metode *Newman Error Analysis (NEA)*. Metode ini diadaptasi untuk menganalisis kesalahan mahasiswa dalam menegasikan definisi limit fungsi. Ada lima kegiatan spesifik yang dapat membantu menemukan letak kesalahan yang dibuat oleh peserta didik saat menyelesaikan suatu masalah (White, 2010). Indikator jenis kesalahan berdasarkan prosedur Newman dapat dilihat dalam Clements (1980). Inilah yang selanjutnya diadaptasi.

Tabel 1. Indikator Jenis Kesalahan Mahasiswa Menegasikan Definisi Limit Fungsi Berdasarkan Metode Analisis Kesalahan Newman yang Direvisi

<b>Tipe Kesalahan</b>	<b>Indikator</b>
<i>Reading Error</i>	Kesalahan dalam memahami soal Kesalahan mahasiswa dalam mengenali simbol-simbol pada soal
<i>Comprehension Error</i>	Mahasiswa sebenarnya sudah dapat memahami soal, tetapi belum menangkap informasi yang terkandung dalam pertanyaan Mahasiswa tidak mengetahui apa yang diketahui atau yang ditanyakan dalam soal
<i>Transformation Error</i>	Mahasiswa salah dalam menentukan strategi pemecahan masalah
<i>Process Skill Error</i>	Kesalahan dalam keterampilan proses Mahasiswa salah dalam menggunakan kaidah atau aturan
<i>Encoding Error</i>	Kesalahan dalam menggunakan notasi Kesalahan karena ceroboh atau kurang cermat

4. Menarik simpulan. Dalam hal ini, peneliti menarik simpulan berdasarkan hasil analisis data.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Kemampuan logika matematika adalah basis pemilihan subjek dalam penelitian ini. Untuk itu, peneliti telah memberikan tes Kemampuan Logika Matematika kepada satu kelas mahasiswa pendidikan matematika Unismuh sebanyak 22 orang. Hasil tes Kemampuan Logika Matematika tersebut disajikan pada Tabel 2 berikut. Dari hasil tersebut ada 5 di antaranya yang berkemampuan logika matematika tinggi. Selanjutnya, dalam kelompok kemampuan tinggi tersebut, dipilih 2 subjek secara purposif. Peneliti memusatkan perhatian dalam memilih subjek pada kualitas artikulasi dalam mengungkapkan ide, baik lisan, maupun tulisan. Dari proses itu, diperoleh subjek penelitian, yaitu SAM dan MAR.

Tabel 2. Skor Tes Logika Matematika Mahasiswa

<b>No</b>	<b>Nama</b>	<b>Skor Mahasiswa</b>
1	RSM	0
2	AMM	0
3	NRS	8,3
4	NFN	12,5
5	IKA	25
6	NMA	20,8
7	SWR	33,3
8	SMN	33,3

*Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam  
Menegasikan Definisi Limit Fungsi*

9	FRD	37,5
10	MFI	37,5
11	NAQ	41,7
12	ARA	45,8
13	FHS	58,3
14	IPM	58,3
15	LIM.	66,7
16	WLJ	66,7
17	SIS	70,8
18	SAM	79,2
19	RSM	79,2
20	KNT	83,3
21	KNN	91,7
22	MAR	95,8

---

Subjek yang telah dipilih, selanjutnya diberikan soal tes pada kotak di bawah ini. Misalkan  $f$  adalah fungsi yang terdefinisi pada selang buka yang memuat  $c$  (kemungkinan bisa hanya di kanan-kiri  $c$ ) dan misalkan  $L$  adalah sebarang bilangan real. Pernyataan,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  berarti bahwa  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , sedemikian sehingga,  $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Tuliskan negasi dari:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Setiap subjek penelitian diberi waktu maksimum 60 menit untuk memikirkan dengan baik respon atau jawaban yang diberikan. Durasi yang diberikan untuk soal tersebut dianggap sebagai waktu yang cukup lowong untuk kemungkinan mereka mengubah keputusan atas respon yang diberikan. Artinya, respon yang diberikan sebagai hasil penelitian ini dianggap sebagai hasil pemikiran dengan mengerahkan potensi atau kemampuan maksimal yang mereka miliki. Selanjutnya, masing-masing subjek penelitian tersebut diwawancarai secara terstruktur mengenai penyelesaian yang mereka tunjukkan.

Respon kedua subjek penelitian terhadap soal yang diberikan disertai penjelasan mereka terhadap respon tersebut saat wawancara dapat disajikan sebagai berikut.

- **Respon SAM terhadap TKMD**

Berikut ini adalah respon atau jawaban dari SAM terhadap Soal Tes Kemampuan Menegasikan Definisi Limit Fungsi (TKMD).

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \\ & p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q, \text{ maka:} \\ & \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \\ & = \sim (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta) \vee |f(x)-L| < \epsilon \\ & = \sim (\sim (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta) \wedge \sim (|f(x)-L| < \epsilon)) \\ & = \sim (\sim (\forall \epsilon > 0) \sim (\exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta) \wedge \sim (|f(x)-L| < \epsilon)) \\ & = \sim (\exists \epsilon > 0) \sim (\forall \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta) \wedge |f(x)-L| \geq \epsilon \\ & = \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-c| < \delta \wedge |f(x)-L| \geq \epsilon \end{aligned}$$

Gambar 1. Penyelesaian Soal TKMD oleh SAM

- **Hasil Wawancara Peneliti dengan SAM tentang Respon terhadap TKMD**

Berikut ini adalah hasil wawancara peneliti dengan SAM tentang respon terhadap Soal Tes Kemampuan Menegasikan Definisi Limit Fungsi (TKMD).

**Pertanyaan 1:**

Tuliskan serinci mungkin alasan, sehingga jawaban Anda seperti itu!

**Respon SAM:**

*Saya menjawab seperti itu karena mengikuti langkah-langkah atau prosedur penyelesaian dari suatu pernyataan berkuantor, baik kuantor umum (universal), maupun kuantor khusus (eksistensial). Pernyataan  $p \Rightarrow q$  sebenarnya adalah soal dari pernyataan, tetapi diubah menjadi  $\sim p \vee q$ , karena pernyataan  $p \Rightarrow q$  ekuivalen dengan  $\sim p \vee q$ . Diambil kata hubung disjungsi agar lebih memudahkan dalam mengerjakan penyelesaian soal tersebut. Pada proses penyelesaian selanjutnya, saya terlebih dahulu menegasikan pernyataan  $p \vee q$ . Apabila telah didapat negasi dari pernyataan tersebut, selanjutnya saya menegasikan kembali pernyataan  $p$ .*

**Pertanyaan 2:**

Menurut Anda, adakah kesalahan pada jawaban Anda tersebut? Apa buktinya?

**Respon SAM:**

*Menurut saya, tidak ada kesalahan pada jawaban saya. Saya yakin jawaban saya sudah benar. Meskipun pada proses penyelesaiannya tidak menegasikan terlebih dahulu pernyataan  $p$ , penyelesaian dari pernyataan tersebut menurut saya telah benar, karena saya pun sudah mengerjakan ulang dengan cara menegasikan pernyataan  $p$  terlebih dahulu, dan hasilnya pun sama dengan jawaban saya yang tertera di gambar.*

*Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam Menegasikan Definisi Limit Fungsi*

**Pertanyaan 3:**

Apakah cara Anda menuliskan proses negasi itu sudah benar? Apa buktinya?

**Respon SAM:**

*Ya sudah benar. Dengan pembuktian, dinegasikannya kuantor per kuantor dan telah saya kerjakan dengan dua cara berbeda, namun hasilnya tetap sama.*

**Pertanyaan 4:**

Adakah kesulitan yang Anda hadapi dalam menuliskan negasi dari definisi tersebut? Jika ada, sebutkan!

**Respon SAM:**

*Ada, yaitu pada kuantor  $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$ . Di sini saya merasa kesulitan, karena awalnya saya memisahkannya satu per satu dan akhirnya saya kesulitan dalam mengerjakannya. Ternyata, kuantor tersebut tidak dipisah, akan tetapi digabungkan. Cara mengerjakannya pun agak lebih mudah.*

**Pertanyaan 5:**

Manakah dari definisi limit fungsi itu yang menyulitkan Anda menuliskan negasinya?

**Respon SAM:**

*Dari definisi limit fungsi yang menyulitkan saya saat menuliskan negasinya, yaitu  $\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$*

▪ **Respon MAR terhadap TKMD**

Berikut ini adalah respon atau jawaban dari MAR terhadap Soal Tes Kemampuan Menegasikan Definisi Limit Fungsi (TKMD).

jawab =

Diketahui:  $P = \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$Q = |f(x) - L| < \epsilon$

Sehingga pernyataan bukannya adalah

$P \Rightarrow Q$

$(P \Rightarrow Q) \equiv \sim P \vee Q$

$\sim (\sim P \vee Q)$

$\sim (\sim P) \wedge (\sim Q)$

$P \wedge \sim Q$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \wedge [ \sim (|f(x) - L| < \epsilon) ]$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon$

Gambar 2. Penyelesaian Soal TKMD oleh MAR

▪ **Hasil Wawancara Peneliti dengan MAR tentang Respon terhadap TKMD**

Berikut ini adalah hasil wawancara peneliti dengan MAR tentang respon terhadap Soal Tes Kemampuan Menegasikan Definisi Limit Fungsi (TKMD).

**Pertanyaan 1:**

Tuliskan serinci mungkin alasan, sehingga jawaban Anda seperti itu!

**Respon MAR:**

Setelah mempelajari materi negasi dan melihat soal itu, saya langsung beranggapan bahwa soal ini tidak begitu sulit, karena bagi saya, inti dari soal ini adalah di tandanya, apakah itu “dan”, “atau”, “jika, maka”, “jika dan hanya jika”. Hal yang pertama saya lihat adalah tandanya, sehingga bagian kiri tanda itu semuanya adalah 1 bagian dan bagian kanannya juga 1 bagian. Itulah, sehingga saya menulis  $p$  dan  $q$ . Sesuai rumus dan pengajaran dari dosen saya bahwa jika  $p$ , maka  $q$  ekuivalen dengan  $\sim p$  atau  $q$ . Karena yang ditanyakan adalah ingkarannya, maka jawabannya pun menjadi  $\sim(\sim p$  atau  $q)$ , sehingga menghasilkan  $p$  dan  $\sim q$ . Kemudian saya mengubah  $p$  dan  $q$  sesuai soal. Setelah diubah, saya negasikan  $q$ , sehingga hasil akhirnya seperti itu.

**Pertanyaan 2:**

Menurut Anda, adakah kesalahan pada jawaban Anda tersebut? Apa buktinya?

**Respon MAR:**

Menurut aku, tidak ada kesalahan dalam jawaban itu karena menurutku, aku sudah menjawab sesuai dengan apa yang telah diajarkan dosen aku dan sebagai bukti. Keduanya memiliki hasil yang sama, sehingga kedua itu terbukti ekuivalen.

$P$	$q$	$P \Rightarrow q$	$P$	$q$	$\sim P$	$\sim P \vee q$
B	B	B	B	B	S	B
B	S	S	B	S	S	S
S	B	B	S	B	B	B
S	S	B	S	S	B	B

**Pertanyaan 3:**

Apakah cara Anda menuliskan proses negasi itu sudah benar? Apa buktinya?

**Respon MAR:**

Menurut aku, cara aku menulis prosesnya sudah benar karena aku menulisnya sudah terperinci dari awal hingga akhir. Sebagai bukti saat aku tulis  $\sim(\sim p$  atau  $q)$  aku bisa saja langsung melangkah ke hasilnya yaitu  $p$  dan  $\sim q$  tapi aku tidak melakukannya dan membuatnya untuk lebih mudah lagi agar aku bisa paham akan jawaban aku sendiri.

**Pertanyaan 4:**

Adakah kesulitan yang Anda hadapi dalam menuliskan negasi dari definisi tersebut? Jika ada, sebutkan!

*Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam Menegasikan Definisi Limit Fungsi*

**Respon MAR:**

*Ketika melihat soal itu aku langsung melihat intinya yaitu tandanya sehingga saat itu juga aku sudah tau prosesnya. Kesulitannya mungkin hanya saat mengerjakan prosesnya saja yang kadang masih kebalik-kebalik.*

**Pertanyaan 5:**

Manakah dari definisi limit fungsi itu yang menyulitkan Anda menuliskan negasinya?

**Respon MAR:**

*Mungkin yang bagian awal yang aku menuliskannya itu sebagai p. Karena aku mungkin sedikit kesulitan untuk mengetahui yang mana yang harus diingkar.*

Untuk mengetahui jenis kesalahan setiap subjek penelitian, selanjutnya respon penyelesaian mereka terhadap soal TKMD dianalisis berdasarkan indikator jenis kesalahan yang dikemukakan oleh Newman. Selain itu, respon mereka melalui wawancara mengkonfirmasi jenis kesalahan, sekaligus menyingkap kesulitan mereka di balik kesalahan yang mereka lakukan.

**Negasi dari:**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**Yaitu:**

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

Di atas adalah definisi limit fungsi beserta negasinya yang diharapkan dicapai oleh mahasiswa saat menegasikan. Penulisan negasi ini pulalah yang menjadi acuan dalam menentukan ketepatan penulisan yang ditunjukkan oleh subjek penelitian dalam respon mereka.

▪ **Analisis Jenis Kesalahan SAM**

Berikut ini adalah penyelesaian yang ditunjukkan oleh SAM.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q, \text{ maka:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$= \sim (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta) \vee |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$= \sim (\sim (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta) \wedge \sim (|f(x) - L| < \varepsilon))$$

$$= \sim (\sim (\forall \varepsilon > 0) \sim (\exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta) \wedge \sim (|f(x) - L| < \varepsilon))$$

$$= \sim (\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta) \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

$$= \sim (\exists \varepsilon > 0) \sim (\forall \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta) \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

$$= \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

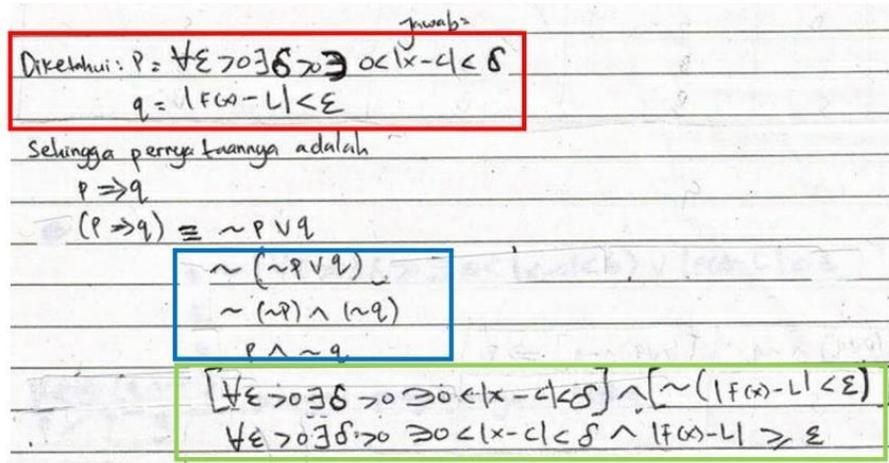
Penyelesaian di atas dapat ditinjau dari prosedur Newman yang direvisi dalam menganalisis kesalahan sebagai berikut.

1. **Reading Error.** Dalam hal ini, kesalahan dalam membaca dan memahami soal. SAM tidak menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan. Padahal, dalam prosedur pemecahan masalah, termasuk menuliskan negasi suatu pernyataan mestinya menuliskan apa yang diketahui, maupun apa yang ditanyakan sebagai indikasi utama pemahaman subjek terhadap soal yang diberikan (Musser dkk, 2008). Respon terhadap Pertanyaan 4 dan 5 menunjukkan bahwa ia tidak paham soal atau ia tidak paham apa yang ingin dinegasikan.
2. **Comprehension Error.** Dalam hal ini, tidak mengetahui apa yang diketahui atau yang ditanyakan dalam soal. Dari penyelesaian yang ditunjukkan, SAM memandang definisi itu sebagai suatu pernyataan berbentuk  $p \rightarrow q$ , di mana ia menganggap  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$  sebagai  $p$ , sedangkan  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sebagai  $q$ . Ini menunjukkan bahwa ia sebenarnya tidak mengetahui apa yang diketahui atau yang ditanyakan dalam soal.
3. **Process Skill Error.** Dalam hal ini, kesalahan dalam menggunakan kaidah. SAM pada dasarnya sudah memahami prosedur menegasikan pernyataan berkuantor. Tampaknya ia pun menyadari hal itu seperti yang ditunjukkan pada hasil wawancara respon terhadap Pertanyaan 1. Tetapi, karena salah paham terhadap makna kuantor pada pernyataan tersebut. Akibatnya, melakukan pengasumsian yang salah saat ingin menegasikan. Ia memandang definisi itu sebagai suatu pernyataan berbentuk  $p \rightarrow q$ , di mana ia menganggap  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$  sebagai  $p$ , sedangkan  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sebagai  $q$ . Padahal, kuantor universal maupun eksistensial pada definisi itu berlaku untuk pernyataan secara keseluruhan. Akibatnya, semua proses berikutnya salah, meskipun Pertanyaan 2 dan 3 ia respon dengan menyatakan keyakinan kuat akan benarnya penyelesaian yang ditunjukkan.
4. **Encoding Error.** Dalam hal ini, kesalahan dalam menggunakan notasi. Andaikan proses berikutnya benar, penulisan pernyataan yang dinegasikan dengan negasinya tidak tepat. Dengan cara seperti yang ditunjukkan berarti pernyataan yang dinegasikan dengan negasinya memiliki nilai kebenaran yang sama. Selain itu, proses menuliskan tanda ekuivalensi juga salah, karena SAM menggunakan tanda  $=$ , padahal mestinya tanda  $\equiv$ .

Sebenarnya, SAM telah menentukan strategi yang akan digunakan dengan tepat, yaitu dengan mengikuti langkah-langkah atau prosedur penyelesaian pernyataan berkuantor, baik universal, maupun eksistensial, seperti yang dapat dilihat pada respon terhadap Pertanyaan 1. Sehingga, SAM tidak mengalami *transformation error* dalam hal strategi pemecahan masalah yang akan digunakan. Namun demikian, penyelesaian SAM menunjukkan bahwa untuk pernyataan berkuantor majemuk, SAM masih kesulitan menjustifikasi kuantor dan maknanya, serta kesulitan menentukan fungsi pernyataannya. Hal ini bisa dilihat pada respon terhadap Pertanyaan 4 dan 5.

▪ **Analisis Jenis Kesalahan MAR**

Berikut ini adalah penyelesaian yang ditunjukkan oleh MAR.



Penyelesaian di atas dapat ditinjau dari prosedur Newman yang direvisi dalam menganalisis kesalahan sebagai berikut.

1. **Reading Error.** Dalam hal ini, kesalahan dalam membaca dan memahami soal. Kalau SAM tidak menuliskan apa yang diketahui (dan ditanyakan). Justru MAR menuliskan apa yang diketahui, tapi salah paham terhadap apa yang diketahui pada soal. Hal ini karena ia membuat pemisalan yang pada soal, sebenarnya tidak ada. Pemisalan yang dimaksud, yaitu  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$  sebagai  $p$ , sedangkan  $|f(x) - L| < \epsilon$  sebagai  $q$ . Apa yang dikatakan oleh Musser dkk (2008) sudah jelas bahwa tulisan apa yang diketahui, maupun apa yang ditanyakan mengindikasikan pemahaman subjek terhadap soal yang diberikan. Dalam kasus ini, respon MAR terhadap Pertanyaan 1 menunjukkan bahwa ia salah paham terhadap soal. Ia berkesimpulan sendiri bahwa inti soal TKMD itu adalah pada tandanya (maksudnya operasi pada logika, seperti konjungsi, disjungsi, atau implikasi). Padahal, definisi limit sebenarnya adalah pernyataan berkuantor yang juga memiliki kaidah tertentu dalam menegasikannya.
2. **Comprehension Error.** Dalam hal ini, tidak mengetahui apa yang diketahui atau yang ditanyakan dalam soal. Dari penyelesaian yang ditunjukkan, MAR memandang definisi itu sebagai suatu pernyataan berbentuk  $p \rightarrow q$ , di mana ia menganggap  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$  sebagai  $p$ , sedangkan  $|f(x) - L| < \epsilon$  sebagai  $q$ . Ini menunjukkan bahwa ia sebenarnya tidak mengetahui apa yang diketahui atau yang ditanyakan dalam soal.
3. **Transformation Error.** Dalam hal ini, salah dalam menentukan strategi pemecahan masalah. Respon MAR terhadap Pertanyaan 1 menunjukkan bahwa strategi pemecahan masalah yang ia tentukan itu salah. MAR mengatakan bahwa hal pertama yang ia lihat dari definisi limit yang ingin diingkari adalah tandanya. Ia memandang kuantor  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  adalah satu bagian dengan  $0 < |x - c| < \delta$ , sedangkan  $|f(x) - L| < \epsilon$  adalah bagian lain yang terpisah.

4. **Process Skill Error.** Dalam hal ini, kesalahan dalam menggunakan kaidah. MAR pada dasarnya sudah memahami prosedur menegaskan pernyataan berkuantor. Namun demikian, ia tidak menyadari kesalahan yang ia lakukan. Hal itu ditunjukkan oleh respon terhadap Pertanyaan 1, 2, dan 3 saat wawancara. Kesalahan itu karena ia salah paham terhadap makna kuantor pada pernyataan tersebut. Respon terhadap Pertanyaan 5 saat wawancara menunjukkan pengakuannya bahwa di awal melihat pernyataan yang ingin dinegasikan, ia mengatakan sulit menentukan mana yang akan dinegasikan atau diingkari. Ia kemudian fokus pada bentuk implikasinya saja dan lupa penjelasan dosen bahwa kuantor universal, maupun eksistensial pada definisi itu berlaku untuk fungsi pernyataan secara keseluruhan. Oleh karena itu, memandang definisi itu sebagai suatu pernyataan berbentuk  $p \rightarrow q$ , di mana ia menganggap  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta$  sebagai  $p$ , sedangkan  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sebagai  $q$  adalah kesalahan fatal.
5. **Encoding Error.** Dalam hal ini, kesalahan dalam menggunakan notasi. SAM menggunakan tanda =, padahal mestinya tanda  $\equiv$ . Adapun MAR sama sekali tidak menggunakan notasi relasi. Dengan demikian, kita tidak bisa memahami relasi apa yang ada dalam pikiran mahasiswa saat menuliskan demikian, apakah relasi ekuivalen, seperti  $\equiv$  atukah relasi =. Namun demikian, dapat dipahami bahwa ada masalah pada pengetahuan mahasiswa tentang penggunaan notasi, baik dilihat dari sisi ketepatan penggunaannya, maupun dilihat dari sisi urgensinya.

Penyelesaian SAM di atas sebagaimana penyelesaian MAR menunjukkan bahwa untuk pernyataan berkuantor majemuk, mahasiswa masih kesulitan menjustifikasi kuantor dan maknanya, serta kesulitan menentukan fungsi pernyataannya. Bahkan MAR menegaskan dalam respon terhadap Pertanyaan 5 bahwa ia kesulitan menentukan bagian yang akan diingkari atau dinegasikan. Berbeda dengan SAM, MAR mengalami *Transformation Error* dalam hal penentuan strategi pemecahan masalah, sebagaimana dikuatkan oleh respon MAR terhadap Pertanyaan 1.

## KESIMPULAN

Berdasarkan uraian hasil penelitian di atas, dapat disimpulkan bahwa dari lima jenis kesalahan dalam analisis kesalahan dengan prosedur Newman, yaitu *Reading Error*, *Comprehension Error*, *Transformation Error*, *Process Skill Error*, dan *Encoding Error*, dua subjek memiliki kesamaan dan perbedaan. Salah satunya mengalami semua jenis kesalahan itu, dan satu yang lain tidak mengalami *Transformation Error*. Kedua subjek penelitian mengalami kesulitan yang sama dalam menghadapi pernyataan berkuantor majemuk. Mereka kesulitan menjustifikasi kuantor dan maknanya, kesulitan menentukan fungsi pernyataannya, dan kesulitan menentukan bagian yang ingin dinegasikan.

Dari temuan penelitian ini dapat disarankan kepada dosen pengampu matakuliah landasan matematika atau matakuliah pengantar dasar matematika agar membuat penegasan tentang kedudukan kuantor terhadap fungsi pernyataan dan prosedur

*Kesalahan dan Kesulitan Mahasiswa Pendidikan Matematika Unismuh dalam  
Menegasikan Definisi Limit Fungsi*

menegasikannya secara sistematis. Selain itu, dosen perlu menekankan pentingnya menulis kalimat matematika dengan benar dan mengajarkan penggunaan notasi atau simbol matematika secara tepat. Selanjutnya, dosen juga perlu mengajarkan heuristik pemecahan masalah, misalnya, dengan langkah Polya. Terakhir, direkomendasikan untuk melakukan penelitian lebih lanjut dengan mengkaji jenis kesalahan dan kesulitan mahasiswa pendidikan matematika untuk yang berkemampuan (logika) matematika sedang dan rendah.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- Bittinger, M. L. (1982). *Logic, Proof, and Sets*. Boston: Addison-Wesley.
- Clements, M. (1980). Analyzing Children's Errors on Written Mathematical Tasks. *Educational Studies in Mathematics*.
- Kamus Besar Bahasa Indonesia. (2016). Analisis. *Badan Pengembangan dan Pembinaan Bahasa, Kemdikbud Republik Indonesia*, (Online), (Diakses melalui laman: <https://kbbi.kemdikbud.go.id/entri/analisis>, pada 7 April 2020).
- Kamus Besar Bahasa Indonesia. (2016). Kesalahan. *Badan Pengembangan dan Pembinaan Bahasa, Kemdikbud Republik Indonesia*, (Online), (Diakses melalui laman: <https://kbbi.kemdikbud.go.id/entri/kesalahan>, pada 7 April 2020).
- Lewin, J. & Lewin, M. (1993). *An Introduction to Mathematical Analysis (2<sup>nd</sup> Edition)*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(1), 35-48.
- Mays, N., & Pope, C. (2000). Qualitative research in health care: Assessing quality in qualitative research. *British Medical Journal*, 320(72), 50-52.
- Moleong, L. J. (2006). *Metodologi Penelitian Kualitatif (Edisi Revisi)*. Bandung: PT Remaja Rosdakarya.
- Mulyadi. (2010). *Diagnosa Kesulitan Belajar & Bimbingan Terhadap Kesulitan Belajar Khusus*. Yogyakarta: Nuha Litera
- Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (2008). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach (Eighth Edition)*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Seputro, T. M. H. T. (1992). *Pengantar Dasar Matematika: Logika Matematika dan Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

- Susilo, F. (2012). *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Thurmond, V.A. (2001). The Point of Triangulation. *Journal of Nursing Scholarship*, 33(3), 253-258.
- Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2007). *Calculus 9<sup>th</sup> Edition*. USA: Pearson
- White, A. L. (2010). Numeracy, Literacy and Newman's Error Analysis. *Allan Leslie White Journal of Science and Mathematics*.
- Widagdo, D., Krisnadi, E., Mulyana, T., & Rajati, T. (2014). *Matematika*. Jakarta: Penerbit Universitas Terbuka.