

MODEL SEIR PADA PENULARAN HEPATITIS B

Syafruddin Side

Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Negeri Makassar
syafruddin.side@yahoo.com

Abstrak

Penyakit Hepatitis B dapat ditafsirkan dengan persamaan matematika. Paper ini membahas pemodelan matematika pada penularan Hepatitis B dengan membagi kelompok populasi menjadi empat bagian yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected* dan *Recovered* (SEIR). Model matematika yang digunakan pada penularan Hepatitis B adalah model SEIR dengan mengasumsikan bahwa laju kelahiran dan kematian adalah sama. Model SEIR yang digunakan juga memperhatikan faktor vaksinasi, imigrasi dan emigrasi yang terjadi pada populasi. Hasil yang diperoleh pada pemodelan SEIR adalah persamaan matematika yang merupakan system persamaan differensial biasa tidak linear berdimensi empat (4-D). Sistem persamaan tersebut kemudian disederhanakan menjadi sistem persamaan differensial tidak linear tiga dimensi (3-D). Sistem dapat disederhanakan karena asumsi bahwa populasi yang telah sembuh dari Hepatitis B menjadi kebal dan tidak lagi terinfeksi penyakit tersebut.

Kata Kunci: Model SEIR, Hepatitis B, Sistem Persamaan Differensial Biasa

Abstract

Hepatitis B can be interpreted by mathematical equations. This paper discusses the mathematical modeling of the transmission of Hepatitis B by dividing the population into groups of four parts, namely Susceptible, Exposed, Infected and Recovered (SEIR). The mathematical model used in the transmission of Hepatitis B is a SEIR model to assume that the rate of birth and death are the same. Model SEIR used also consider factors vaccination, immigration and emigration that occurred in the population. The results obtained in SEIR model is a mathematical equation system of ordinary differential equations in the form of four-dimensional (4-D). The equation system then reduces to a system of equations differensial three-dimensional (3-D). The system can be simplified because of the assumption that the population has been cured of Hepatitis B become resistant and no longer infected with the disease.

Keyword: SEIR, Hepatitis B, Differential Equation System

PENDAHULUAN

Salah satu penyakit menular yang memiliki tingkat penyebaran yang tinggi adalah penyakit Hepatitis B. Saat ini diseluruh dunia diperkirakan sekitar dua miliar orang terinfeksi virus Hepatitis B, 240 juta orang secara kronis terinfeksi virus Hepatitis B (didefinisikan sebagai Hepatitis B antigen permukaan positif selama minimal 6 bulan) dan 780.000 orang meninggal setiap tahun karena terinfeksi virus Hepatitis B, 650.000 dari sirosis dan

kanker hati akibat infeksi virus Hepatitis B kronis dan 130.000 dari Hepatitis B akut (WHO, 2015).

Hepatitis adalah peradangan pada hati yang disebabkan oleh virus Hepatitis, sehingga hati tidak bisa menjalankan fungsinya dengan optimal. Ada berbagai macam jenis virus hepatitis yaitu Hepatitis A, B, C, D dan E. Yang harus diwaspadai oleh tenaga kesehatan yang bekerja di Rumah sakit adalah Hepatitis B dan

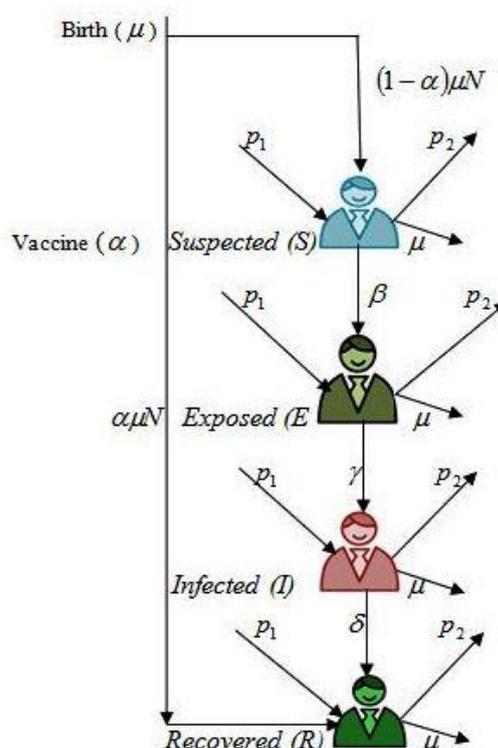
Model SEIR

Hepatitis C. Seseorang disebut menderita Hepatitis B bila dalam pemeriksaan laboratorium darah didapatkan hasil HbsAg positif/ reaktif / hasil $> 0,99$ dan disebut menderita Hepatitis C bila dalam pemeriksaan laboratorium didapatkan hasil anti HCV Total positif. Kedua jenis hepatitis ini bisa menular lewat darah maupun cairan tubuh lainnya (misal cairan semen, cairan di selaput otak) dan bersifat menetap (tidak bisa hilang dari tubuh) dan kronis. (Warta Katiga, 2012).

Pemodelan matematika SIR dan SEIR dapat digunakan untuk mendeteksi dan meramalkan jumlah kasus DBD seperti yang telah dilakukan oleh peneliti-peneliti (Esteva & Vargas, 2000; Pongsumpun, 2006; Nuraini dkk., 2007; Guihua & Zhen, 2009; Syafruddin Side dkk., 2010, 2011, 2013; Rangkuti & Side, 2014). Kemudian pemodelan matematika mengenai penularan penyakit Hepatitis B dilakukan oleh Larasati D, & Tjahjana (2012) yang berjudul "Analisis Model Matematika untuk Penyebaran Virus HBV" dalam penelitiannya mengkaji tentang pemodelan matematika SIR pada infeksi virus Hepatitis B. Penelitian tentang Hepatitis B juga dilakukan oleh Mulis (2010), pada penelitiannya yang berjudul "Pengaruh Vaksinasi Terhadap Dinamika Populasi Pada Model SIR" dalam penelitiannya mengkaji model penyebaran penyakit tipe SIR dengan pengaruh vaksinasi dengan tingkatan yang tinggi atau rendah dan model penyebaran SIR tanpa vaksinasi. Dalam penelitian tersebut migrasi tidak berpengaruh pada model, karena diasumsikan migrasi tidak terjadi dalam populasi.

Epidemik

Polusi semakin meningkat dan berkelanjutan pada saat ini sehingga menjadi peringatan untuk semua negara di belahan dunia, hal ini menyebabkan terjadinya pemanasan global hingga terjadi perubahan iklim. Negara-negara di Asia Tenggara, khususnya Indonesia juga merasakan dampak dari pemanasan global. Musim penghujan hampir terjadi sepanjang tahun, akibatnya penyakit yang biasanya muncul setelah musim hujan tidak lagi dapat diprediksi seperti penyakit Hepatitis B. (Fajar, Maret 2014). Oleh karena itu, model penularan Hepatitis B memerlukan satu tambahan variabel untuk melengkapi model SIR yaitu variabel populasi manusia yang memperlihatkan gejala terinfeksi. Perubahan yang terjadi pada setiap populasi manusia dapat didefinisikan dalam Gambar 1 berikut:

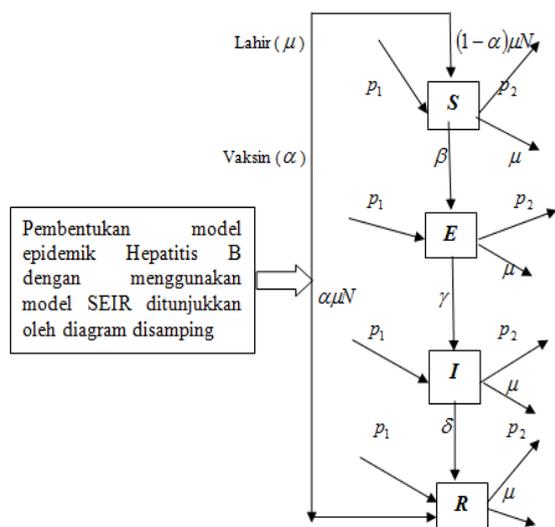


Gambar 2.2 Diagram populasi manusia

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model SEIR Pada Penularan Hepatitis B

Berdasarkan gambar 1, model SEIR untuk Hepatitis B dapat diilustrasikan pada gambar 2 berikut:



Gambar 2: Pembentukan Model SEIR Pada Penularan Hepatitis B

Sama halnya dengan model SIR, model ini juga mempunyai faktor utama penyebab manusia terinfeksi Hepatitis B, yang berbeda dengan model SIR adalah model SEIR membagi populasi manusia N kepada empat sub-populasi yaitu manusia berpotensi terinfeksi Hepatitis B, S , manusia yang memperlihatkan gejala ditulari Hepatitis B, E , manusia yang telah terinfeksi Hepatitis B, I , dan manusia yang telah sembuh, R . Kajian ini mengasumsikan bahwa terdapat manusia dalam populasi ini yang telah ditulari virus tetapi belum dapat menularkan ke manusia lain, tetapi mampu menyebabkan penularan virus.

Setiap manusia dikategorikan dalam satu bagian saja dalam satu waktu. Setiap manusia dalam grup *Suspected*, S dipengaruhi oleh jumlah kelahiran populasi manusia yang gagal atau tidak di vaksin yaitu $(1 - \alpha)\mu NS$, jumlah imigrasi, $p_1 S$, jumlah manusia memperlihatkan gejala terinfeksi βS , jumlah emigrasi, $p_2 S$ dan jumlah manusia suspek yang meninggal μS .

Setiap manusia dalam grup *Exposed*, E dipengaruhi oleh jumlah manusia memperlihatkan gejala terinfeksi βS , jumlah imigrasi, $p_1 E$, jumlah populasi manusia yang telah terinfeksi Hepatitis B, γE , jumlah emigrasi, $p_2 E$ dan jumlah manusia terinfeksi yang meninggal μE , sedangkan setiap manusia dalam grup *Infected*, I dipengaruhi oleh jumlah populasi manusia yang telah terinfeksi Hepatitis B γE , jumlah imigrasi, $p_1 I$, jumlah kematian populasi manusia yang terinfeksi μI , jumlah emigrasi, $p_2 I$ dan jumlah populasi manusia yang sembuh dari jangkitan, δI

Selanjutnya, Setiap manusia dalam grup *Recovered*, R dipengaruhi oleh jumlah kelahiran populasi manusia di vaksin yaitu $\alpha\mu NS$, jumlah imigrasi $p_1 R$, jumlah emigrasi, $p_2 R$, jumlah populasi manusia yang sembuh dari hepatitis B, δI dan jumlah kematian manusia yang sembuh μR

Model SEIR Pada Penularan Hepatitis B

Jika gambar 2 disajikan dalam bahasa matematika, maka laju perubahan jumlah manusia yang rentan (*Susceptible*) ditulari Hepatitis B terhadap waktu $\left(\frac{dS}{dt}\right)$ dipengaruhi oleh jumlah kelahiran populasi

Model SEIR

manusia yang gagal atau tidak di vaksin yaitu $(1-\alpha)\mu NS$, jumlah populasi yang masuk ke wilayah rentan (imigrasi), $p_1 S$, jumlah populasi yang memperlihatkan gejala terinfeksi βS , jumlah populasi yang keluar dari wilayah rentan (emigrasi), $p_2 S$ dan jumlah populasi rentan yang meninggal μS , dapat ditafsirkan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1-\alpha)\mu NS + p_1 S - (p_2 + \beta + \mu) S \quad (1)$$

Laju perubahan jumlah populasi yang memperlihatkan gejala terinfeksi terhadap waktu $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ dipengaruhi oleh jumlah manusia memperlihatkan gejala terinfeksi βS , jumlah imigrasi $p_1 E$, jumlah populasi manusia yang telah terinfeksi Hepatitis B, γE , jumlah emigrasi, $p_2 E$ dan jumlah manusia terinfeksi yang meninggal μE , dapat ditafsirkan sebagai berikut:

$$\frac{dE}{dt} = \beta S + p_1 E - (\gamma + p_2 + \mu) E \quad (2)$$

Laju perubahan jumlah manusia terinfeksi langsung oleh virus terhadap waktu $\left(\frac{dI}{dt}\right)$ dipengaruhi oleh jumlah populasi manusia yang telah terinfeksi Hepatitis B, γE , jumlah imigrasi, $p_1 I$, jumlah kematian populasi manusia yang terinfeksi μI , jumlah emigrasi, $p_2 I$ dan jumlah populasi manusia yang sembuh dari jangkitan, δI dapat ditafsirkan sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E + p_1 I - (\mu + p_2 + \delta) I \quad (3)$$

Laju perubahan jumlah populasi manusia yang pulih terhadap waktu $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ adalah jumlah kelahiran populasi manusia di vaksin yaitu $\alpha\mu NS$, jumlah imigrasi $p_1 R$, jumlah emigrasi, $p_2 R$, jumlah populasi manusia yang sembuh dari hepatitis B, δI dan jumlah kematian manusia yang sembuh μR dapat ditafsirkan sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \alpha\mu NS + \delta I + p_1 R - (\mu + p_2) R \quad (4)$$

Tafsiran matematika pada uraian di atas dapat disajikan dalam bentuk model matematika yaitu model persamaan differensial biasa tidak linear 4-D sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-\alpha)\mu NS + p_1 S - (p_2 + \beta + \mu) S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S + p_1 E - (\gamma + p_2 + \mu) E \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E + p_1 I - (\mu + p_2 + \delta) I \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha\mu NS + \delta I + p_1 R - (\mu + p_2) R$$

dengan $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$

atau $R(t) = N(t) - (S(t) + E(t) + I(t))$

Model matematika SEIR untuk penularan Hepatitis B pada persamaan (5) merupakan sistem persamaan differensial biasa tidak linear 4-D. Model yang dihasilkan dapat disederhanakan dengan mengandaikan pecahan-pecahan berikut:

$$x(t) = \frac{S}{N}, \quad y(t) = \frac{I}{N}, \quad z(t) = \frac{I}{N}$$

$$\text{dan } u(t) = \frac{E}{N}.$$

Berdasarkan asumsi tersebut, maka model SEIR populasi manusia pada penularan Hepatitis B dapat disederhanakan seperti pada persamaan (6) berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1 - \alpha)\mu x + p_1 x - (p_2 + \beta + \mu)x \\ \frac{du}{dt} &= \beta x + p_1 u - (\gamma + p_2 + \mu)u \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma u + p_1 y - (\mu + P_2 + \delta)y \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha \mu N x + \delta y + p_1 z - (\mu + p_2)z\end{aligned}\quad (6)$$

Berdasarkan asumsi bahwa populasi yang telah sembuh menjadi kebal, maka persamaan $\frac{dz}{dt}$ dapat diabaikan, sehingga bentuk paling sederhana dari sistem persamaan differensial (6) diuraikan pada sistem persamaan (7) berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1 - \alpha)\mu x + p_1 x - (p_2 + \beta + \mu)x \\ \frac{du}{dt} &= \beta x + p_1 u - (\gamma + p_2 + \mu)u \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma u + p_1 y - (\mu + P_2 + \delta)y\end{aligned}\quad (7)$$

Persamaan (7) adalah bentuk pemodelan matematika pada penularan Hepatitis B yang merupakan sistem persamaan differensial biasa tidak linear 3-D.

KESIMPULAN

Penularan penyakit Hepatitis B dapat ditafsirkan dalam persamaan matematika. Persamaan matematika tersebut merupakan sistem persamaan differensial

tidak linear 4-D. Sistem persamaan differensial tersebut kemudian disederhanakan menjadi sistem persamaan differensial tidak linear 3-D berdasarkan asumsi bahwa populasi yang telah sembuh menjadi kebal dari penyakit Hepatitis B. Sistem persamaan differensial biasa 3-D tersebut merupakan bentuk paling sederhana dari pemodelan matematika pada penularan penyakit Hepatitis B.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih diucapkan kepada pihak Universitas Negeri Makassar (UNM) yang telah mensupport dana melalui PNBPU Pusat UNM.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonim, 2015. <http://ebookdatabase.net/epidemic-models-113583575> [Diakses 4 Maret 2015].
- Anonim <https://www.scribd.com/doc/136431636/IPT-RUJUKAN-CAMPAK>, [Diakses 5 Maret 2015].
- Anton, H. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga : Jakarta
- Budiarto, E, dan Anggraeni, D. 2002. *Pengantar Epidemiologi* . Ed 2. penerbit EGC. Jakarta.
- Edwards, C.H. dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall Inc.
- Hardiningsih, A. Y. 2010. *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik pada Waktu Diskrit*.
- Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Differensial*. Yogyakarta: J&J Learning
- Rahmalia, D. 2010. *Permodelan Matematika Dan Analisis Stabilitas Dari Model SEIR*

Penyebaran Penyakit Flu Burung (Mathematical Model and Stability Analysis The Spread of Avian Influenza).

Tjolleng, Amir., Komalig, H. A.H., dan Prang, J.D. 2013. *Dinamika Perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial Nonlinear SIR (Susceptible, Infectious And Recovered).* Universitas Sam Ratulangi. Jurnal ilmiah sains vol. 13 n .1:9-14.

Ulfa, M. 2013. *Model Matematika untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi.* Skripsi S1 tidak dipublikasikan Program Studi Matematika Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Yogyakarta: UIN Sunan Kalijaga

Wahab, W. & Subiantoro, A. Tanpa Tahun. *Fundamental of Control System Stability Criterion-Routh Hurwitz.*

Warta Katiga, 2012. Mengenal Hepatitis Di Tempat Kerja. Edisi 6, 2012.