# Modifikasi Model SIR pada Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue di Kabupaten Bone

Syafruddin Side<sup>1</sup>, Alimuddin<sup>1</sup>, dan Alvioni Bani<sup>1, a)</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar

a) alvionibani0506@gmail.com

Abstrak. Artikel ini membahas mengenai modifikasi model epidemik SIR pada penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Bone dengan penembahan asumsi baru bahwa 20% penderita DBD yang sembuh akan kembali terinfeksi dan 80 % dari individu yang telah sembuh, tidak akan kembali menjadi rentan. Data yang digunakan adalah jumlah penderita DBD di Kabupaten Bone tahun 2016 dari Dinas Kesehatan Kabupaten Bone. Pembahasan dimulai dari penentuan titik equilibrium, stabilitas, bilangan reproduksi dasar ( $\mathbf{R}_0$ ) dan simulasi menggunakan Maple. Dalam penelitian ini diperoleh dua titik equilibrium dengan nilai reproduksi dasar  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{2}, \mathbf{34}$ . Hal ini menunjukkan bahwa penyakit DBD di Kabupaten Bone akan terus meningkat dan menjadi endemik.

Kata Kunci: Titik Equilibrium, Bilangan Reproduksi Dasar, DBD, Modifikasi Model SIR.

**Abstract.** The research discusses a modification of epidemic model SIR on the spreadof dengue fever disease in Bone District. With some addition of the assumption that 20% of patients who recovered will be re-infected and 80% of individuals who have recovered will not be susceptible. The data used in the number of dengue fever patients in Bone District in 2016 from Bone District Health Office. The discussion starts by the determination of equilibrium points, stability and basic reproduction numbers ( $\mathbf{R}_0$ ). In this study, we obtained that two equilibrium points and basic reproduktion value  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{2}, \mathbf{34}$ . This indicates that dengue fever disease in Bone District will increase and become endemic.

Keywords: Equilibrium Point, Basic Reproduction Number, Dengue Fever, The Modification of SIR Model

## **PENDAHULUAN**

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata. Model matematika yang dibuat berdasarkan asumsi-asumsi. Model matematika yang telah dibentuk akan dilakukan analisis, agar model yang dibuat representatif terhadap permasalahan yang dibahas. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya bidang kesehatan, kimia, biologi, dan lain-lain yang dapat dibuat model matematikanya (Maesaroh, 2013).

Dalam penelitian ini membahas sebuah model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* tipe SIRI (*Susceptible, Infected, Recovered, Infected*), model tersebut merupakan modifikasi dari model SIR. Model SIR pertama kali diperkenalkan pada tahun 1927 oleh Kermack dan McKendrick (Murray, 2002). Modifikasi model dilakukan dengan menambahkan asumsi bahwa penderita yang pulih dapat rentan kembali terkena DBD akibat hilangnya kekebalan tubuh, hal tersebut didukung dengan pernyataan bahwa penyakit DBD adalah penyakit yang disebabkan oleh virus *dengue* dari genus Flavivirus, famili Flaviviridae. Ada 4 jenis serotipe *dengue*, yaitu

169

DEN-1, DEN-2, DEN-3, dan DEN-4 (Aini & Shodiqin, 2014), sehingga dapat disimpulkan bahwa penderita dengue dapat tertular lebih dari sekali.

Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat di Indonesia yang cenderung semakin luas penularannya, penyakit ini sering menimbulkan kekhawatiran masyarakat karena perjalanan penyakitnya cepat dan dapat menyebabkan kematian dalam waktu singkat serta merupakan penyakit menular yang dapat menimbulkan kejadian wabah (Anonim). Kabupaten Bone adalah daerah yang memiliki tingkat kasus DBD tertinggi kesebelas se-SulSel sebanyak 19 kasus dengan 3 orang meninggal dunia (Anonim). Proporsi diperkirakan akan terus meningkat hingga beberapa bulan ke depan.

#### Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Suatu persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Finizio & Ladas, 1988). Misalkan suatu sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan sebagai:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0\tag{1}$$

x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas.

#### Sistem Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier

Suatu persamaan diferensial biasa nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear. Misalkan suatu sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan sebagai:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}f(t,x) \tag{2}$$

$$dengan \ x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

dengan 
$$f(x,t) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

adalah fungsi tak linear dalam  $x_1, x_2, ..., x_n$ . Sistem persamaan (2) disebut sistem persamaan diferensial biasa nonlinear (Braun, 1994).

#### Linierisasi

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa nonlinear berikut:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

 $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$  dengan  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  adalah suatu fungsi bernilai vektor dalam t dan  $f: U \to \mathbb{R}^n$  adalah suatu fungsi mulus yang terdefinisi pada subhimpunan  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

Dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar titik tetap  $\bar{x}$ , maka sistem persamaan (3) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{x} = \dot{\eta} = J\eta + \varphi(\eta) \tag{4}$$

dengan J adalah matriks Jacobi yang dinyatakan sebagai berikut :

$$J = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

adalah suku berorde tinggi yang bersifat  $\lim_{\eta \to 0} \varphi(\eta) = 0$ , dengan  $\eta = x - \bar{x}$ .  $J\eta$  pada sistem persamaan (4) disebut pelinearan sistem persamaan (3) (Tu, 1994).

## Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan  $R_0$ . Beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu :

- 1. Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan menghilang.
- 2. Jika  $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap.
- 3. Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah (Giesecke, 1994).

## Demam Berdarah Dengue (DBD)

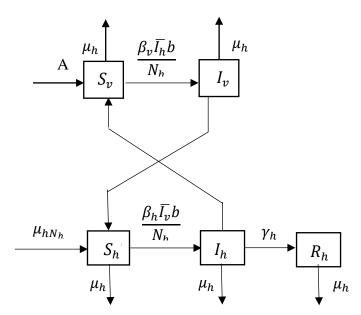
Pengertian penyakit demam berdarah yaitu penyakit yang disebabkan oleh virus dengue yang mana virus ini menyebar dan menginfeksi ke tubuh manusia melalui gigitan nyamuk Aedes Aegypti. Dan ini artinya penyakit demam berdarah tidak akan bisa menular hanya melalui kontak antar manusia. Penularan penyakit demam berdarah bisa terjadi jika terdapat perantara melalui nyamuk tersebut, sama seperti pada penyakit malaria yang diakibatkan oleh nyamuk Anopheles. Nyamuk Aedes Aegypti ini bisa berkembang biak di daerah yang berpenduduk tinggi misalnya kota-kota besar dan juga yang memiliki iklim lembab dan hangat. Nyamuk Aedes Aegypti ini biasanya bersarang di tempat yang kotor dan lembab seperti tempat sampah, toilet dan sebagainya.

## Model Epidemik SIR DBD

Model epidemi SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model tersebut terdiri dari tiga variabel yaitu: Susceptible ( $S_h$ ) atau individu yang rentan terserang penyakit, Infected ( $I_h$ ) atau individu yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit tersebut kepada individu yang rentan dan Recovered ( $R_h$ ) atau individu yang diasumsikan telah sembuh (Murray J. , 2002). Sedangakan populasi nyamuk dibagi atas dua variabel yaitu, Susceptible ( $S_v$ ) dan Infected ( $I_v$ ) Adapun asumsi-asumsi yang digunakan sebagai berikut:

- 1. Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi
- 2. Tidak terdapat migrasi
- 3. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan
- 4. Penyakit berbahaya, apabila terinfeksi akan menyebabkan kematian
- 5. Populasi konstan (tertutup).

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, diperoleh diagram transfer populasi model SIR pada penyakit Demam Berdarah *Dengue* yaitu:



GAMBAR 1. Diagram Transfer Model SIR Penyakit Dengue

Dari Gambar 1 diperoleh sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - \left(\frac{\beta_h b}{N_h} I_v + \mu_h\right) S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h} S_h I_v - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - \frac{\beta_h b}{N_h} S_v I_h - \mu_v S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{\beta_v b}{N_h} S_v I_h - \mu_v I_v$$

$$S_h + I_h + R_h = N_h$$

$$S_v + I_v = N_v$$

 $S_h$ : Populasi manusia yang rentan terinfeksi

 $I_h$ : Populasi manusia yang terinfeksi

 $R_h$ : Populasi manusia yang sembuh

 $S_v$ : Populasi nyamuk rentan terinfeksi

 $I_v$ : Populasi nyamuk terinfeksi

 $N_h$ : Total populasi manusia

 $N_{\nu}$ : Total populasi nyamuk

 $\mu_h$ : Laju kematian alami manusia

 $\mu_{\nu}$ : Laju kematian alami nyamuk

 $\gamma_h$ : Proporsi perpindahan dari manusia terinfeksi menjadi sembuh

 $\beta_h b$ : Peluang terjadinya interaksi antara nyamuk terinfeksi dengan manusia rentan

 $\beta_{\nu}b$ : Peluang terjadinya kontak antara nyamuk rentan dengan manusia terinfeksi (Aini & Shodiqin, 2014)

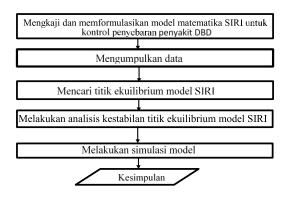
### METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian terapan (*applied research*) dengan pendekatan kuantitatif yaitu dengan mengambil atau mengumpulkan data yang diperlukan dan menganalisisnya dengan menggunakan model modifikasi persamaan diferenisla SIR untuk mengetahui apakah penyakit DBD akan menjadi endemik di Kabupaten Bone. Data yang digunakan adalah data sekunder yaitujumlah kasus penderita penyakit DBD pada tahun 2016 dari Dinas Kesehatan Kabupaten Bone. Jumlah kasus yang diperoleh sebanyak 760 kasus.

Adapun prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

- 1. Membangun model SIRI untuk penyebaran penyakit DBD
  - a. Mengasumsikan variable dan parameter model SIRI
  - b. Membentuk Model SIRI.
- 2. Menganalisis model SIRI menggunakan data DBD di Kabupaten Bone
  - a. Mengumpulkan data dari Dinas Kesehatan Kabupaten Bone.
  - b. Mencari titik ekuilibrum dari persamaan SIRI penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Bone.
  - c. Menentukan kestabilan titik tetap dari persamaan SIRI penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Bone.
- 3. Mengimplementasi hasil simulasi penyebaran penyakit DBD dengan menggunakan *Maple*.
  - a. Menginput nilai hasil analisis model ke dalam software.
  - b. Menganalisis hasil simulasi.
  - c. Menarik kesimpulan.

#### Skema Penelitian



**GAMBAR 2.** Skema Penelitian

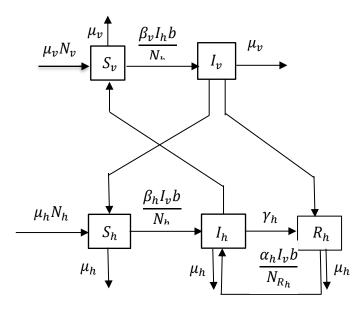
#### HASIL DAN PEMBAHASAN

## Model Epidemik SIRI Penyebaran Penyakit DBD

Model Epidemik SIRI merupakan model modifikasi dari model SIR. Asumsi baru ditambahkan yakni:

- 1. 20% dari individu yang telah sembuh dari penyakit DBD, akan kembali terinfeksi kembali.
- 2. Individu yang telah sembuh dan tidak terinfeksi kembali akan sembuh total dan tidak akan kembali menjadi rentan.

Sehingga parameter baru ditambahkan yakni  $\alpha_h b$ . Parameter tersebut merupakan interaksi antara dari  $R_h$  ke  $I_h$ . Adapun diagram transfer populasi model SIRI pada penyakit Demam Berdarah *Dengue* yaitu:



GAMBAR 3. Diagram Transfer Model SIRI Penyakit Dengue

Dari Gambar 3 diperoleh sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h N_h - \left(\frac{\beta_h b}{N_h} I_v + \mu_h\right) S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{\beta_h b}{N_h} S_h I_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}} R_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \left(\mu_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}}\right) R_h, \frac{dS_v}{dt} = \mu_v N_v - \left(\frac{\beta_v b I_h}{N_h} + \mu_v\right) S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{\beta_v b}{N_h} S_v I_h - \mu_v I_v$$

$$S_h + I_h + R_h = N_h \qquad S_v + I_v = N_v = \frac{A}{\mu_v}$$

## Analisis Model Epidemik SIRI Menggunakan Data Penderita Penyakit DBD di Kabupaten Bone

TABEL 1. Nilai variabel model SIRI pada penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Bone

Variabel	Nilai
$S_h$	724.617 jiwa
$I_h$	760 jiwa
$R_h$	749 jiwa
$S_v$	498.000 ekor
$I_v$	2.000 ekor

<b>TABEL 2</b> Nilai	parameter model SIRI	pada penyebaran	penyakit DBD di Kabupaten Bone
----------------------	----------------------	-----------------	--------------------------------

Parameter	Nilai
$\lambda_h$	13.898 bayi
$\mu_h$	0,00126/bulan
$oldsymbol{eta_h} oldsymbol{b}$	22,5
$oldsymbol{eta}_{v}oldsymbol{b}$	11,25
$N_h$	738.515 jiwa
$\gamma_h$	7,52/bulan
$lpha_h b$	112,5
$\mu_{v}$	0,67/bulan
$N_{v}$	500.000 ekor

Sehingga formulasi model epidemik DBD untuk Kabupaten Bone dapat dilihat dari persamaan-persamaan berikut.

$$\frac{dS_h}{dt} = 0,00126 \times 738.515 - \left(0,00126 + \frac{22,5I_v}{738.515}\right) S_h$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{22,5I_v}{738.515} S_h + \frac{112,5I_v}{749} R_h - (7,52 + 0,00126) I_h$$

$$\frac{dR_h}{dt} = 7,52I_h - \left(\frac{112,5I_v}{749} + 0,00126\right) R_h$$

$$\frac{dS_v}{dt} = 0,67 \times 500.000 - \left(0,67 + \frac{11,25I_h}{738.515}\right) S_v$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{11,25I_h}{738.515} S_v - 0,67I_v$$

$$S_h(0) = 724.617 \quad I_h(0) = 760 \quad R_h(0) = 749$$

$$S_v(0) = 498.000 \quad I_v(0) = 2.000$$

## Titik Kesetimbangan Model Epidemik DBD

Titik kesetimbangan bebas penyakit  $(E^x) = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) = (N_h, 0, 0, N_v, 0)$ . Titik kesetimbangan endemik.

$$(E^{**}) = (S_h^{**}, I_h^{**}, R_h^{**}, S_v^{**}, I_v^{**})$$

$$= \left(\frac{\mu_h N_h}{\left(\frac{\beta_h I_v b}{N_h} + \mu_h\right)}, \frac{\frac{\beta_h b}{N_h} S_h I_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}} R_h}{(\mu_h + \gamma_h)}, \frac{\gamma_h I_h}{\left(\mu_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}}\right)}, \frac{\mu_v N_v}{\left(\frac{\beta_v I_h b}{N_h} + \mu_v\right)}, \frac{\beta_v I_h \mu_v b}{N_h} S_v\right)$$

## **Analisis Kestabilan Titik Tetap**

Analisis kestabilan titik tetap bebas penyakit

$$\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + \mu_h & 0 & 0 & 0 & \beta_h b \\ 0 & \mu_h + \gamma_h + \lambda & 0 & 0 & -\beta_h \alpha_h b^2 \\ 0 & -\gamma_h & -\mu_h & 0 & -\alpha_h b \\ 0 & \beta_v b & 0 & \mu_v + \lambda & 0 \\ 0 & -\beta_v b & 0 & 0 & \mu_v + \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Sehingga persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut

$$\begin{split} \lambda^5 + \lambda^4 (\gamma_h + 3\mu_h + 2\mu_v) + \lambda^3 (-b^3 \beta_h \beta_v \alpha_h + 2\gamma_h \mu_h + 2\gamma_h \mu_v + 3\mu_h^2 + 6\mu_h \mu_v + \mu_v^2) + \\ \lambda^2 \Big( -2b^3 \beta_h \beta_v \alpha_h \mu_h - b^3 \beta_h \beta_v \alpha_h \mu_v + \gamma_h \mu_h^2 + 2\gamma_h \mu_v + \mu_h^3 + 6\mu_h^2 \mu_v + 3\mu_v^2 \mu_h \Big) + \\ \lambda (-2b^3 \beta_h \beta_v \alpha_h \mu_h \mu_v + \gamma_h + \mu_v^2 + 2\mu_h^3 \mu_v + 3\mu_h^2 \mu_v^3) - b^3 \beta_h \beta_v \alpha_h \mu_h^2 \mu_v + \gamma_h \mu_h + \\ \mu_v^2 \mu_h + \gamma_h \mu_h^2 \mu_v + \mu_h^3 \mu_v^2 = 0 \end{split}$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\lambda^5 + a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = 0$$

Untuk polinom selanjutnya, analisis kestabilan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Misalkan:

$$a = \gamma_h + 3\mu_h + 2\mu_v$$

$$b = -b^{3}\beta_{h}\beta_{v}\alpha_{h} + 2\gamma_{h}\mu_{h} + 2\gamma_{h}\mu_{v} + 3\mu_{h}^{2} + 6\mu_{h}\mu_{v} + \mu_{v}^{2}$$

$$c = -2b^{3}\beta_{h}\beta_{v}\alpha_{h}\mu_{h} - b^{3}\beta_{h}\beta_{v}\alpha_{h}\mu_{v} + \gamma_{h}\mu_{h}^{2} + 2\gamma_{h}\mu_{v} + \mu_{h}^{3} + 6\mu_{h}^{2}\mu_{v} + 3\mu_{v}^{2}\mu_{h}$$

$$d = -2b^{3}\beta_{h}\beta_{v}\alpha_{h}\mu_{h}\mu_{v} + \gamma_{h} + \mu_{v}^{2} + 2\mu_{h}^{3}\mu_{v} + 3\mu_{h}^{2}\mu_{v}^{3}$$

$$e = -b^{3}\beta_{h}\beta_{v}\alpha_{h}\mu_{h}^{2}\mu_{v} + \gamma_{h}\mu_{h} + \mu_{v}^{2}\mu_{h} + \gamma_{h}\mu_{h}^{2}\mu_{v} + \mu_{h}^{3}\mu_{v}^{2}$$

Sehingga dapat dibuat tabel Routh seperti tabel 3 berikut

**TABEL 3**. Tabel Routh-Hurwitz

$\frac{\lambda^5}{\lambda^4}$	1	b	d	0
$\lambda^4$	a	С	е	0
$\lambda^3$	$\frac{ab-c}{a}$	$\frac{ad-e}{a}$	0	
$\lambda^2$	$\frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)c-a\left(\frac{ad-e}{a}\right)}{\frac{ab-c}{a}}$ $=c-\left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a$	$\frac{\left(\frac{ab-c}{e}\right)e}{\frac{ab-c}{a}}$ $= e$		
$\lambda^1$	$\frac{\left(\left(c - \left(\frac{ad - e}{ab - c}\right)a\right)\left(\frac{ad - e}{a}\right)\right) - \left(\frac{ab - c}{a}\right)}{c - \left(\frac{ad - e}{ab - c}\right)a}$ $= \left(\frac{ad - e}{a}\right) - \frac{\left(\frac{ab - c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad - e}{ab - c}\right)a}$	0		
$\lambda^0$	$\frac{\left(\frac{ad-e}{a} - \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}\right)e}{\left(\frac{ad-e}{a} - \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}\right)} = e$			

Karena semua suku positif maka sistem tersebut stabil, maka syarat perlu dan cukup untuk stabil terpenuhi. Sistem stabil saat e > 0 dimana parameternya  $\epsilon$  [0,1].

Analisis kestabilan titik tetap endemik

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\beta_{h}I_{v}b}{N_{h}} + \mu_{h} & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_{h}bS_{h}}{N_{h}} \\ -\left(\frac{\beta_{h}I_{v}b}{N_{h}}\right) & \lambda + \mu_{h} + \gamma_{h} & -\left(\frac{\alpha_{h}I_{v}b}{N_{R_{h}}}\right) & 0 & \frac{\beta_{h}\alpha_{h}b^{2}S_{h}}{N_{h}} \\ 0 & -\gamma_{h} & \lambda + \frac{\alpha_{h}I_{v}b}{N_{R_{h}}} + \mu_{h} & 0 & -\alpha_{h}b \\ 0 & \frac{\beta_{v}bS_{v}}{N_{h}} & 0 & \lambda + \frac{\beta_{v}I_{h}b}{N_{h}} + \mu_{v} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\beta_{v}bS_{v}}{N_{h}}\right) & 0 & -\left(\frac{\beta_{v}I_{h}b}{N_{h}}\right) & \lambda + \mu_{v} \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteritik sebagai berikut

$$\lambda^{5} + \lambda^{4} \left( 3\mu_{v} + 2\frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} + \gamma_{h} + \frac{\beta_{h}bI_{v}}{N_{h}} \right) + \lambda^{3} \left( 3\mu_{v}^{2} + \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{3\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}}{N_{h}} + \mu_{h}^{2} + 2\mu_{h} + 6\mu_{h}\mu_{v} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{h}}{N_{h}} + 3\gamma_{h}\mu_{v} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\gamma_{h}}{N_{h}} + \gamma_{h}\mu_{h} + 2I_{v}I_{h} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{v}\mu_{v}}{N_{h}} + \frac{\beta_{h}bI_{v}\gamma_{h}}{N_{h}} \right) + \lambda^{2} \left( 3\mu_{v}\mu_{h}^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + 6\mu_{v}^{2}\mu_{h} + 2\mu_{h} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{8\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}}{N_{h}} + 3\mu_{v}^{2}\gamma_{h} + \gamma_{h} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\gamma_{h}}{N_{h}} + 3\mu_{v}\mu_{h}\gamma_{h} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{h}\gamma_{h}}{N_{h}} + \frac{3\beta_{h}bI_{v}\mu_{v}^{2}}{N_{h}} + 2I_{v}I_{h}\gamma_{h} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{3} + 4I_{v}I_{h}\mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{3\beta_{h}bI_{v}\mu_{v}\gamma_{h}}{N_{h}} + 2I_{v}I_{h}\gamma_{h} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{2} + \mu_{v}^{3} + \mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\gamma_{h}}{N_{h}} + 2I_{v}I_{h}\gamma_{h} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{2} + \mu_{v}^{3} + \mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + 2I_{v}I_{h}\gamma_{h} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{2} + \mu_{v}^{3} + \mu_{v}^{2} \mu_{h}\gamma_{h} + \mu_{h}\gamma_{h} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + I_{v}I_{h}^{2}\mu_{h} \left( \frac{\beta_{h}b}{N_{h}} \right)^{3} + 4I_{v}I_{h}\mu_{h}\mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{3\beta_{h}bI_{v}\mu_{v}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + 2\mu_{h}\mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + 2\mu_{h}\mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + 2\mu_{h}\mu_{v}^{3} + 2\mu_{h}\mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{3\beta_{h}bI_{v}\mu_{v}\mu_{v}\mu_{h}^{2}}{N_{h}} + 2\mu_{h}\mu_{v}^{3} + 2\mu_{h}\mu_{v} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}^{2}\mu_{h}}{N_{h}} + \mu_{v}^{2} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}^{2}\mu_{h}}{N_{h}} + 2\mu_{h}\mu_{v}^{2} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} \right)^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}\mu_{h}^{2}\mu_{h}}{N_{h}} + 2\mu_{h}\mu_{h}^{2} \left( \frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}}$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\lambda^5 + a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = 0$$

Untuk polinom selanjutnya, analisis kestabilan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Misalkan:

$$a = 3\mu_{v} + 2\frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}} + \gamma_{h} + \frac{\beta_{h}bI_{v}}{N_{h}}$$

$$b = 3\mu_{v}^{2} + \left(\frac{\beta_{h}bI_{h}}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{3\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}}{N_{h}} + \mu_{h}^{2} + 2\mu_{h} + 6\mu_{h}\mu_{v} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{h}}{N_{h}} + 3\gamma_{h}\mu_{v} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\gamma_{h}}{N_{h}} + \gamma_{h}\mu_{h}^{2} + 2\mu_{h}^{2} + 2\mu_{h}^{2} + 6\mu_{h}\mu_{v}^{2} + \frac{4\beta_{h}bI_{h}\mu_{h}}{N_{h}} + 3\gamma_{h}\mu_{v}^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\nu_{v}}{N_{h}} + \gamma_{h}^{2} + \frac{2\beta_{h}bI_{h}\mu_{v}^{2}}{N_{h}} + \beta_{h}^{2} + \beta_{h}$$

$$\begin{split} d &= \mu_{v}^{2} \mu_{h}^{2} + \left(\frac{\beta_{h} b I_{h} \mu_{h}}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{2\beta_{h} b I_{h} \mu_{v} \mu_{h}^{2}}{N_{h}} + \mu_{v}^{2} \mu_{h} \gamma_{h} + \mu_{h} \gamma_{h} \left(\frac{\beta_{h} b I_{h}}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{4\beta_{h} b I_{h} \mu_{v} \mu_{h} \gamma_{h}}{N_{h}} + \frac{4\beta_{h} b I_{h} \mu_{v} \mu_{h} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h}^{2} \mu_{h} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 4I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{3\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{2} \gamma_{h}}{N_{h}} + 4I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{4\beta_{h} b I_{h} \mu_{v}^{2} \gamma_{h}}{N_{h}} + 4I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b I_{h}}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{4\beta_{h} b I_{h} \mu_{v}^{2} \gamma_{h}}{N_{h}} + \gamma_{h} \mu_{v}^{3} + \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b I_{h}}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{2\beta_{h} b I_{h} \mu_{v}^{2} \gamma_{h}}{N_{h}} + 2\mu_{h} \mu_{v}^{2} \gamma_{h} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3}}{N_{h}} + I_{v} I_{h}^{2} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b I_{h}}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{2\beta_{h} b I_{h} \mu_{v}^{2} \mu_{v}^{2} \mu_{h}^{2}}{N_{h}} + I_{v} I_{h}^{2} \mu_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{2} + \frac{\beta_{h} b I_{v} \mu_{v}^{3} \gamma_{h}}{N_{h}} + I_{v} I_{h} \gamma_{h} \mu_{v} \left(\frac{\beta_{h} b}{N_{h}}\right)^{3} + 2I_{v} I_{h} \mu_{h} \mu_{v}^{2} \left(\frac{\beta_{h$$

Sehingga dapat dibuat tabel Routh 2 seperti tabel 4 berikut

<b>TABEL 4</b> . Tabel Routh 2-Hurwitz				
$\lambda^5$	1	b	d	0
$\lambda^4$	a	c	e	0
$\lambda^3$	$\frac{ab-c}{a}$	$\frac{ad-e}{a}$	0	
$\lambda^2$	$\frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)c-a\left(\frac{ad-e}{a}\right)}{\frac{ab-c}{a}}$ $=c-\left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a$	$\frac{\left(\frac{ab-c}{e}\right)e}{\frac{ab-c}{a}}$ $= e$		
$\lambda^1$	$\frac{\left(\left(c - \left(\frac{ad - e}{ab - c}\right)a\right)\left(\frac{ad - e}{a}\right)\right) - \left(\frac{ab - c}{a}\right)}{c - \left(\frac{ad - e}{ab - c}\right)a}$ $= \left(\frac{ad - e}{a}\right) - \frac{\left(\frac{ab - c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad - e}{ab - c}\right)a}$	0		
$\lambda^0$	$\frac{\left(\frac{ad-e}{a} - \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}\right)e}{\left(\frac{ad-e}{a} - \frac{\left(\frac{ab-c}{ab-c}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}\right)} = e$			

Polinomial orde lima mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemenelemen dari kolom pertama pada tabel *Routh-Hurwitz* mempunyai tanda sama. Sehingga diperoleh ketika  $R_0 > 1$  maka titik setimbang endemik stabil asimtotik.

## Bilangan Reproduksi Dasar

Model epidemik penyakit DBD memiliki nlai bilangan reproduksi dasar  $(R_0)$  yaitu

$$R_0 = \frac{b^3 \beta_h \beta_v \alpha_h \mu_h \mu_v}{\gamma_h + \mu_v^2 + \gamma_h \mu_h \mu_v^2 + \mu_h^2 \mu_v^2} = 2,34$$

Karena  $R_0 > 1$  maka titik kesetimbangan endemik

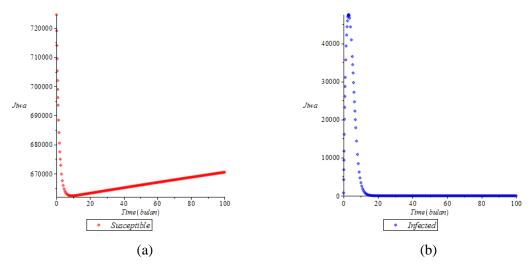
$$E^{**} = (S_h^{**}, I_h^{**}, R_h^{**}, S_v^{**}, I_v^{**})$$

$$E^{**} = \left(\frac{\mu_h N_h}{\left(\frac{\beta_h I_v b}{N_h} + \mu_h\right)}, \frac{\frac{\beta_h b}{N_h} S_h I_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}} R_h}{(\mu_h + \gamma_h)}, \frac{\gamma_h I_h}{\left(\mu_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}}\right)}, \frac{\mu_v N_v}{\left(\frac{\beta_v I_h b}{N_h} + \mu_v\right)}, \frac{\beta_v I_h \mu_v b}{N_h} S_v\right)$$

$$E^{**} = (8,26689; 37.234,9081; 283,5; 58,479; 3.862,88)$$

Dimana titik kesetimbangan tersebut stabil asimtotik dan penyakit tersebut tidak hilang dari populasi serta menyebabkan endemik di Kabupaten Bone. Nilai  $R_0 > 1$  artinya setiap penderita dapat menularkan penyakit DBD kepada lebih dari satu penderita baru, sehingga dapat menyebarkan penyakit yang lebih luas.

## Simulasi Model Epidemik SIRI Menggunakan Maple

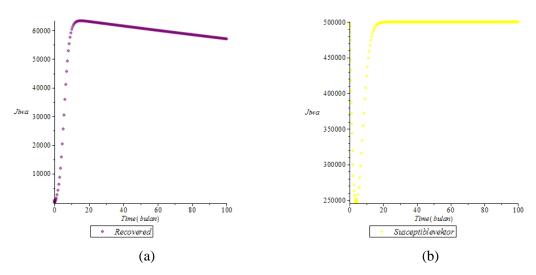


GAMBAR 4. (a) Plot Susceptible model epidemik SIRI pada DBD

(b) Plot Infected model epidemik SIRI pada panyakit DBD

Gambar 4(a) menunjukkan bahwa jumlah individu rentan pada awalnya terjadi penurunan namum pada bulan ke-9 terjadi peningkatan dan terus meningkat hingga akhir.. Setiap individu yang sehat namun rentan terkena penyakit masuk ke dalam populasi susceptible, individu pada subpopulasi ini akan rentan terhadap penyakit dan memiliki peluang yang sangat besar untuk terinfeksi penyakit.

Gambar 4(b) menunjukkan bahwa pada awalnya jumlah individu yang terinfeksi mengalami kenaikan namun setelah memasuki bulan ke-5 jumlah populasi infeksi mengalami penurunan namun seiring berjalannya waktu terlihat bahwa jumlahnya relatif sama atau tidak terjadi perubahan yang signifikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa jumlah populasi manusia yang terinfeksi DBD akan terus sama dan bahkan bisa saja mengalami peningkatan, hal ini dikarenakan individu yang sembuh memiliki peluang untuk terinfeksi kembali.

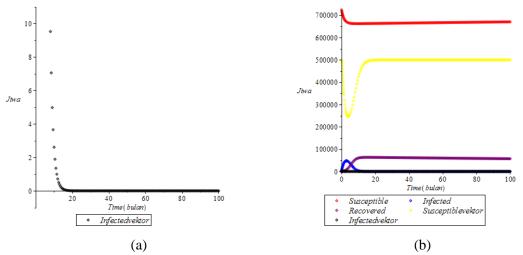


GAMBAR 5. (a) Plot Recovered model epidemik SIRI pada panyakit DBD

(b) Plot susceptible untuk populasi nyamuk

Gambar 5(a) menunjukkan bahwa pada awalnya individu yang sembuh terjadi peningkatan namun setelah setelah memasuki bulang ke-10, terlihat bahwa terjadi penurunan. Hal ini dikarenakan 20% dari kelompok individu sembuh akan terinfeksi kembali.

Pada awalnya gambar 5(b) menunjukkan bahwa terjadi penurunan namun pada bulan ke-5 terjadi peningkatan yang sangat signifikan namun pada nilai 500.000 terjadi kestabilan. Hal ini dikarenakan meskipun nyamuk betina dapat bertelur hingga 300 butir namun setiap ekor nyamuk hanya dapat bertahan hidup selama 10 hari bahkan kurang.



**GAMBAR 6.** (a) Plot *infected* untuk populasi nyamuk (b) Plot siri pada DBD

Gambar 6(a) menunjukkan bahwa pada awalnya terjadi penurunan setelah itu, nilainya relatif sama hal ini diakrenakan dalam sehari hanyaterdapat 1 nyamukyang terinfeksi dan seekor nyamuk hanya dapat bertahan hidup selama kurang dari 10 hari.

Gambar 6(b) menunjukkan bahwa jumlah individu rentan setelah bulan ke-9 akan mengalami peningkatan. Selanjutnya menunjukkan bahwa pada awalnya jumlah individu yang terinfeksi mengalami kenaikan namun setelah memasuki bulan ke-5 jumlah populasi infeksi mengalami penurunan namun seiring berjalannya waktu terlihat bahwa jumlahnya relatif sama atau tidak terjadi perubahan yang signifikan. Kemudian pada awalnya individu yang sembuh terjadi

peningkatan namun setelah setelah memasuki bulan ke-10, terlihat bahwa terjadi penurunan.. Untuk kelompok vektor, pada kelompok *susceptible* menunjukkan peningkatan yang sangat signifikan namun pada nilai 500.000 terjadi kestabilan dan pada kelompok *infected* mengalami penurunan hal ini dikarenakan setiap ekor nyamuk hanya bisa bertahan hidup kurang lebih selama 10 hari.

### **KESIMPULAN**

Dari pembahasan yang telah dilakukan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Formulasi model SIRI penyebaran penyakit DBD di Kabupaten Bone

$$\begin{split} \frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_h - \left(\frac{\beta_h b}{N_h} I_v + \mu_h\right) S_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_h b}{N_h} S_h I_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}} R_h - (\mu_h + \gamma_h) I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \left(\mu_v + \frac{\alpha_h I_v b}{N_{R_h}}\right) R_h \\ \frac{dS_v}{dt} &= \mu_v N_v - \left(\frac{\beta_v b I_h}{N_h} + \mu_v\right) S_v \\ \frac{dI_v}{dt} &= \frac{\beta_v b}{N_h} S_v I_h - \mu_v I_v \end{split}$$

2. Titik Ekuilibrium Model

$$E^{*} = (S_{h}^{*}, I_{h}^{*}, R_{h}^{*}, S_{v}^{*}, I_{v}^{*}) = (N_{h}, 0, 0, N_{v}, 0).$$

$$E^{**} = (S_{h}^{**}, I_{h}^{**}, R_{h}^{**}, S_{v}^{**}, I_{v}^{**}) =$$

$$\left(\frac{\mu_{h}N_{h}}{\left(\frac{\beta_{h}I_{v}b}{N_{h}} + \mu_{h}\right)}, \frac{\frac{\beta_{h}b}{N_{h}}S_{h}I_{v} + \frac{\alpha_{h}I_{v}b}{NR_{h}}R_{h}}{(\mu_{h} + \gamma_{h})}, \frac{\gamma_{h}I_{h}}{\left(\mu_{v} + \frac{\alpha_{h}I_{v}b}{NR_{h}}\right)}, \frac{\mu_{v}N_{v}}{\left(\frac{\beta_{v}I_{h}b}{N_{h}} + \mu_{v}\right)}, \frac{\beta_{v}I_{h}\mu_{v}b}{N_{h}}S_{v}\right)$$

3. Simulasi model SIRI menggunakan data penderita DBD di Kabupaten Bone. Dari hasil simulasi dapat disimpulakan bahwa akan terus terjadi peningkatan jumlah individu *susceptible* dan *infected* untuk penyakit DBD hal ini juga dikarenakan 20% dari populasi individu *recovered* akan kembali ke populasi individu *infected*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin berjalannya waktu penderita DBD akan terus bertambah dan menjadi wabah.

## **DAFTAR PUSTAKA**

Aini, A., & Shodiqin, A. (2014). Analisis Kestabilan dan Simulasi Model Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD). *Jurnal Matematika, Satitistika, dan Komputasi*.

Braun, M. (1994). Differential Equations and Their Applications. New York: Spinger Verlarg.

Finizio, & Ladas. (1988). Persamaan Diferensial Biasa dengan penerapan Modern. Jakarta: Erlangga.

Giesecke, J. (1994). Modern Infectious Disease Epidemiology. New York: Oxford University Press.

Anonim. Departemen Kesehatan: Demam Berdarah Biasanya Mulai Meningkat di Januari. http://www.depkes.go.id/article/view/15011700003/demamberdarah-biasanya-mulai-meningkat-di-januari. diakses pada 20 Maret 2016

- Maesaroh, U. (2013). *Model Matematika Untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi*. Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Yogyakarta.
- Murray, J. (2002). *Biology: An Introduction (3rd ed.)*. New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Murray, J. (2002). *Mathematical Biology: An Introduction with Applications in Economics and Biology*. New York: Springer-Verlarg.
- Tu, P. (1994). *Dynamical Sistem : An Introduction with Applications in Economics and Biology*. New York: Springer Verlarg.