

Analisis Survival Weibull dengan Pendekatan Bayesian (Studi Kasus Pasien Penderita Penyakit Demam Berdarah Dengue di RSUD Haji Kota Makassar)

Wahidah Sanusi¹, Sukarna¹ dan Nurwakia^{1, a)}

¹Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar, 90224

^{a)}wakianur90@yahoo.co.id

Abstrak. Penelitian ini mengkaji literatur yang berkaitan tentang analisis survival Weibull dengan pendekatan Bayesian. Analisis survival merupakan suatu himpunan dari prosedur statistik untuk menganalisis data dimana variabel respon merupakan variabel waktu sampai suatu peristiwa terjadi. Tujuan penerapan dari analisis survival dalam penelitian ini adalah mengetahui laju kesembuhan penderita demam berdarah dengue (DBD). Untuk mengetahui laju kesembuhan pasien DBD di RSUD Haji Kota Makassar digunakan fungsi hazard dan fungsi survival yang berdistribusi Weibull dua parameter, dengan mengestimasi parameter Weibull menggunakan pendekatan Bayesian. Berdasarkan data lama rawat inap pasien penderita DBD di RSUD Haji diperoleh: model survival Weibull $s(t) = \exp(0,00062t^4)$ dan model laju kesembuhan pasien penderita DBD di RSUD Haji menunjukkan bahwa semakin lama pasien dirawat inap maka, kemungkinan untuk sembuh semakin besar.

Kata Kunci: Demam Berdarah Dengue, Distribusi Weibull, Fungsi Hazard, Fungsi Survival, Pendekatan Bayesian.

Abstract. This study examines the relevant literature on Weibull survival analysis with Bayesian approach. The survival analysis is a set statistical procedures to analyze the data which the response variable is a time variable until an event occurs. The purpose of the implementation of survival analysis in this study is to know the healing rate of dengue fever (DF) patient. In order to know the healing rate of DF patients in Haji Hospital Makassar, we use hazard function and survival function that is distributed Weibull two parameters, by estimating Weibull parameter using Bayesian approach. Based on the old data of DF patient hospitalization in Haji Hospital, we obtained: Weibull survival model $s(t) = \exp(-0,00062t^4)$ and healing rate model of dengue patients, $h(t) = 0,00248t^3$. The healing rate of dengue fever patients in Haji Hospital shows that the longer the patient is hospitalized, the more likely it is to heal.

Keywords: Dengue Fever, Weibull Distribution, Hazard Function, Survival Function, Bayesian Approach.

PENDAHULUAN

Analisis survival adalah prosedur statistik untuk menganalisis data dimana variabel yang diperhatikan adalah waktu sampai terjadinya suatu *event* [1]. Analisis pada data survival melibatkan data *time-to-event*, dimana waktu sampai terjadinya suatu *event* yang diinginkan disebut survival time atau *failure time* [2].

Fungsi yang menggambarkan hubungan antara kovariat dan waktu sampai suatu peristiwa terjadi disebut fungsi survival. Sedangkan fungsi hazard sebagai reaksi sesaat atau laju kegagalan (kesembuhan) sesaat ketika mengalami kejadian (*event*) [3]. Pada umumnya analisis survival digunakan dalam penelitian bidang kesehatan.

Pada umumnya analisis survival Weibull dengan studi kasus DBD menggunakan pendekatan klasik, namun dalam penelitian ini analisis survival Weibull menggunakan pendekatan Bayesian. Kelebihan pendekatan Bayesian dibandingkan dengan pendekatan klasik adalah dalam pendekatan Bayesian, selain mempertimbangkan informasi dari sampel, informasi sebelumnya tentang distribusi parameter yang dikenal dengan istilah distribusi *prior* juga dipertimbangkan dalam model.

Indonesia merupakan negara beriklim tropis yang sangat memungkinkan untuk berkembang biaknya jentik-jentik nyamuk. Berbagai jenis penyakit yang dapat disebabkan oleh gigitan nyamuk cukup beraneka ragam, salah satunya adalah Demam Berdarah Dengue (DBD). Jumlah penderita DBD khususnya di Indonesia selalu bertambah setiap tahunnya, disebabkan karena kurangnya tingkat kesadaran masyarakat terhadap pentingnya sanitasi masih rendah sehingga dapat menimbulkan penyakit yang memicu Kejadian Luar Biasa (KLB) [4]. Adapun di Kota Makassar, penderita penyakit DBD meningkat tajam hingga dua kali lipat sepanjang 2013 dibanding tahun sebelumnya. Menurut Kepala Dinas Kesehatan Makassar, Naisyah Tun Nurainah Azikin, hingga November tahun 2013 terdapat sekitar 160 kasus DBD yang meningkat tajam dibanding tahun 2012 yang hanya sekitar 80 orang. Tingginya kasus DBD sepanjang 2013 disebabkan cuaca tidak menentu, sehingga DBD terjadi sepanjang tahun.

Analisis Survival

Survival merupakan asal kata dari *to survive* yang berarti ketahanan atau kelangsungan hidup [5]. Analisis survival atau analisis ketahanan hidup bertujuan memodelkan distribusi yang mendasari variabel waktu kegagalan/kesembuhan dan menafsirkan ketergantungan variabel waktu kegagalan/kesembuhan dengan variabel bebas [3].

Waktu survival memiliki dua karakteristik khusus yang penting, yaitu:

1. waktu survival adalah non-negatif, akibatnya biasanya positif miring (*skewed positive*). Namun dapat menggunakan pendekatan yang lebih baik sebagai model distribusi alternatif untuk data asli.
2. Beberapa subjek mungkin memiliki periode sehingga waktu kejadian gagal tidak diketahui atau secara umum survival yang tidak diketahui dinamakan data tersensor.

Kualitas dasar yang juga digunakan untuk menggambarkan fenomena waktu kejadian adalah fungsi survival. Misalkan T adalah variabel random tidak negatif pada interval $[0, \infty)$ yang menunjukkan waktu individu sampai mengalami kejadian pada populasi, $f(t)$ merupakan fungsi kepadatan peluang dari t maka peluang suatu individu tidak mengalami kejadian sampai waktu t dinyatakan dengan fungsi survival $s(t)$ [6].

$$s(t) = p(T \geq t) = 1 - F(t) \quad (1)$$

Fungsi hazard adalah probabilitas suatu individu mati dalam interval waktu dari t sampai $t + \Delta t$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t [7].

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p[(t \leq T < (t + \Delta t) \cap (T \geq t)]}{P(T \geq t) \Delta t} \right] \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{(1 - F(t)) \Delta t} \right] \tag{2}
 \end{aligned}$$

karena $1 - F(t) = s(t)$, maka

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{s(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(t + \Delta t) - F(t) \\
 &= \frac{f(t)}{s(t)}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang sering digunakan dalam analisis data survival. Menurut [8] suatu peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi Weibull dengan parameter α dan β , jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluangnya:

$$f(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} \text{ untuk } x > 0, \alpha > 0, \text{ dan } \beta > 0 \tag{4}$$

Pendekatan Bayesian

Pada teori statistik, estimasi dapat dilakukan dalam dua pendekatan yaitu pendekatan statistik kalsik dan pendekatan statistik Bayesian. Statistik kalasik mengandalkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi. Berbeda halnya dengan estimasi pada pendekatan Bayesian, disamping memanfaatkan informasi dari data sampel dan memperhitungkan suatu distribusi awal yang disebut sebagai distribusi *prior*, sehingga menghasilkan distribusi *posterior* [9].

Fungsi Likelihood

Fungsi *likelihood* adalah fungsi densitas bersama dari n variabel acak T_1, T_2, \dots, T_n dan dinyatakan dalam bentuk $f(t_1, t_2, \dots, t_n; \theta)$. Jika t_1, t_2, \dots, t_n ditetapkan, maka fungsi *likelihood* adalah fungsi dari parameter θ dan dinotasikan dengan $L(\theta)$. Jika t_1, t_2, \dots, t_n menyatakan suatu sampel random dari $f(t_i; \theta)$ maka:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta). \tag{5}$$

Distribusi Prior

Dalam inferensi Bayes, parameter θ diperlukan sebagai variabel, maka akan mempunyai nilai dalam sebuah domain dengan densitas $f(\theta)$, dan densitas inilah yang akan dinamakan sebagai distribusi *prior*. permasalahan utama dalam pendekatan Bayesian adalah memilih distribusi *prior* $\pi(\theta)$, dimana *prior* menunjukkan tentang parameter θ yang tidak diketahui [10]. Distribusi *prior* dikelompokkan menjadi dua kelompok berdasarkan fungsi *likelihoodnya* yaitu: *prior konjugat* dan *prior informative*. Namun, pada penelitian ini akan digunakan adalah *prior konjugat*.

Distribusi Posterior

Didalam estimasi Bayesian dikenal pula distribusi *posterior*. Distribusi posterior adalah fungsi probabilitas bersyarat θ jika nilai observasi T diketahui dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(\theta|t_i) = \frac{f(\theta, t_i)}{f(t_i)}. \quad (6)$$

Menurut [11] fungsi kepadatan bersama yang diperlukan dapat ditulis dalam bentuk distribusi *prior* dan fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$f(\theta, t_i) = f(\theta)f(t_i; \theta). \quad (7)$$

Demam Berdarah Dengue

Penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) termasuk penyakit menular yang disebabkan oleh virus *dengue* dan ditularkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* yang ditandai dengan demam mendadak 2-7 hari tanpa penyebab yang jelas, lemah/lesu, gelisah, nyeri ulu hati, disertai tanda pendarahan dikulit berupa bitnik-bintik pendarahan kulit (*petechide*), lebam (*ecchymosis*), atau ruam (*purpura*). Kadang-kadang mimisan, berak darah, kesadaran menurun atau renjatan (*shok*) [12].

Demam Berdarah Dengue (BDB) adalah penyakit demam akut disertai dengan manifestasi pendarahan bertendensi menimbulkan syok dan dapat menyebabkan kematian, umumnya menyerang pada anak usia dibawah 15 tahun, namun tidak tertutup kemungkinan menyerang orang dewasa [13].

METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian terapan (applied research) dengan pendekatan kuantitatif yaitu dengan mengambil data yang diperlukan dan menganalisisnya dengan menggunakan model survival Weibull dengan pendekatan Bayesian untuk mengetahui laju kesembuhan penyakit Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSUD Haji Kota Makassar tahun 2016. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder penderita Demam Berdarah Dengue (DBD) di RSUD Haji Kota Makassar. Jumlah data yang diperoleh sebesar 33 data. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data penderita penyakit DBD.
2. Mendeskripsikan data penderita penyakit DBD.
3. Melakukan pengujian distribusi Weibull terhadap waktu survival. Pada tahap ini dilakukan analisis distribusi Weibull dengan bantuan software Minitab 16, data diuji dengan menggunakan Anderson Darling.
4. Menentukan model Weibull.
5. Menentukan fungsi survival.
6. Menentukan fungsi hazard.
7. Menentukan fungsi likelihood.
8. Menentukan distribusi prior.
9. Menentukan distribusi posterior
10. Mengestimasi parameter model Weibull dua parameter menggunakan distribusi posterior dengan simulasi numerik MCMC002E

HASIL DAN PEMBAHASAN

Estimasi Parameter Model Survival Weibull Dua Parameter

Fungsi kepadatan peluang peubah acak T yang berdistribusi Weibull dua parameter adalah:

$$f(t|\alpha, \beta) = \alpha\beta t^{\beta-1} \exp(-\alpha t^\beta); t > 0, \quad (7)$$

dimana α adalah parameter skala ($\alpha > 0$), dan β adalah parameter bentuk ($\beta > 0$)

fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Weibull (α, β) pada data survival dapat ditulis:

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta) dx$$

misalkan: $y = \alpha x^\beta$, maka $\frac{dy}{dx} = \alpha\beta x^{\beta-1}$ sehingga diperoleh $F(t) = 1 - \exp(-\alpha t^\beta)$.

Berdasarkan persamaan 2 maka diperoleh fungsi hazard dari distribusi Weibull sebagai berikut:

$$h(t) = \frac{f(t)}{s(t)} = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1} \exp(-\alpha t^\beta)}{(-\alpha t^\beta)} = \alpha\beta t^{\beta-1} \tag{8}$$

Misalkan (t_1, t_2, \dots, t_n) adalah himpunan sampel acak waktu ketahanan hidup yang saling bebas dan berdistribusi Weibull dua parameter yaitu α dan β maka fungsi likelihood dari fungsi tersebut adalah:

$$L(\alpha|t_i, \beta) = \prod_{i=1}^n [f(t_i; \alpha, \beta)]^{\delta_i} [s(t_i)]^{1-\delta_i} \tag{9}$$

Dimana $\delta_i = 1$ jika individu ke- i ($i = 1, 2, \dots, n$) mengalami suatu kejadian atau kegagalan dalam batas periode tertentu, dan $\delta_i = 0$ jika observasi atau pengamatan tersensor [14].

Mengestimasi parameter dengan menggunakan metode Bayesian dibutuhkan fungsi *likelihood*, distribusi *posterior*, dan distribusi *prior*. Menurut [14] jika nilai parameter β pada persamaan (7) diketahui, maka distribusi *prior* konjugat untuk parameter α adalah distribusi *Gamma*. Jika parameter α dan β tidak diketahui maka pada umumnya tidak ada distribusi *prior* gabungan spesifik antara α dan β . Namun demikian, distribusi *prior* untuk α dan β masing-masing dapat dipilih distribusi *Gamma* dan distribusi *Normal*. berdasarkan penelitian ini, dibatasi distribusi *prior* untuk parameter α yang akan digunakan adalah distribusi *Gamma* yaitu:

$$\pi(\alpha|w, q) = \frac{1}{\Gamma(w)q^w} \alpha^{w-1} \exp\left(-\frac{\alpha}{q}\right); \quad \alpha > 0 \tag{10}$$

Dimana w adalah parameter skala $w > 0$ dan q adalah parameter bentuk $q > 0$

Distribusi *posterior* diperlukan untuk mengestimasi nilai parameter. Distribusi *posterior* dapat dinyatakan dengan perbandingan antara fungsi kepadatan bersama dan fungsi marginal. Fungsi kepadatan bersama dapat ditulis dalam bentuk perkalian fungsi *likelihood* dan distribusi *prior*, dan fungsi marginal ditulis dengan mengintegrasikan hasil perkalian fungsi *likelihood* dan distribusi *prior* yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$g(\alpha|t_i, \beta) = \frac{\ln L(t_i|\alpha, \beta) \pi(\alpha|w, q)}{\int_0^\infty \ln L(t_i|\alpha, \beta) \pi(\alpha|w, q) d\alpha} \tag{11}$$

Penerapan Laju Pasien Penderita DBD Menggunakan Survival Weibull Bayesian

Pengujian Distribusi Data Pasien Penderita DBD

Pengujian distribusi data dilakukan dengan menggunakan uji *Anderson Darling*. Karena *Anderson Darling* merupakan suatu metode pengujian distribusi yang dapat dengan mudah mendeteksi kesesuaian distribusi jika dibandingkan dengan uji distribusi yang lain. Suatu data dikatakan berdistribusi Weibull ketika nilai statistik *Anderson Darling* tersebut lebih kecil dibandingkan dengan nilai statistik *Anderson Darling* distribusilain.

TABEL 1. Hasil Pengujian uji kesesuaian distribusi peluan lama rawat inap pasien

Distrib	Distribusi	Nilai Anderson Darling	p-value
Exponensial		7.100	<0.003
Exponential	2 parameter	3.759	<0.010

Weibull 2-parameter	0.593	0.122
Weibull 3 parameter	0.562	0.120

Penentuan Nilai Estimasi Parameter Distribusi Weibull

Fungsi survival dan fungsi hazard waktu rawat inap pasien DBD di RSUD Haji Kota Makassar dibentuk berdasarkan hasil estimasi dari distribusi Weibull dua parameter melalui pendekatan Bayesian terhadap data waktu survival.

TABEL 2. Nilai Statistik Untuk Alpha

Parameter	Mean	Median	Batas bawah interval kepercayaan 95%	Batas Atas interval kepercayaan 95%	Standar Deviasi
Alpha (α)	0,00062	0,0006	0,0004	0,0008	0,0001

Parameter Weibull dikatakan signifikan jika dalam interval kepercayaan 95% tidak memuat 0, artinya parameter yang diduga merupakan estimasi parameter distribusi Weibull. Tabel 2 memperlihatkan bahwa penaksir parameter distribusi Weibull sebesar 0,00062 yaitu nilai mean dari parameter α . Berdasarkan nilai penaksir parameter tersebut diperoleh model untuk distribusi Weibull adalah: $s(t) = 0,00062t^4$ dan model hazard distribusi Weibull adalah: $h(t) = 0,00248t^3$.

TABEL 3. Nilai fungsi Survival dan Fungsi Hazard Berdasarkan Data Waktu Survival Pasien DBD

t	$s(t) = \exp(-0,00062t^4)$	$h(t) = 0,00248t^3$
2	0,999	$1,270 \times 10^{-7}$
3	0,950	$4,287 \times 10^{-7}$
4	0,851	$1,016 \times 10^{-6}$
5	0,675	$1,985 \times 10^{-6}$
6	0,443	$3,430 \times 10^{-6}$
7	0,221	$5,446 \times 10^{-6}$
8	0,076	$8,130 \times 10^{-5}$
9	0,016	$1,158 \times 10^{-5}$

Nilai fungsi survival dan fungsi hazard distribusi Weibull dua parameter diberikan pada Tabel 3. Tabel tersebut memperlihatkan bahwa nilai fungsi survival semakin menurun dan fungsi hazard semakin meningkat seiring lama waktu survival. Hal ini berarti bahwa semakin lama pasien rawat inap, peluang kemampuan untuk bertahan pasien akan semakin meningkat dan laju kesembuhan pasien akan tinggi.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan mengenai analisis survival Weibull dengan pendekatan Bayesian studi kasus penyakit demam berdarah dengue (DBD), maka dapat disimpulkan sebagai berikut;

1. Model survival Weibull dua parameter adalah $s(t) = \exp(-\alpha t^\beta)$ dan model hazardnya adalah $h(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$, dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

2. Berdasarkan data lama rawat inap pasien penderita DBD di RSUD Haji diperoleh model survival Weibull $s(t) = -0,00062t^4$ dan model laju kesembuhan pasien penderita DBD $h(t) = 0,00248t^3$.
3. Laju kesembuhan pasien penderita DBD di RSUD Haji menunjukkan bahwa semakin lama pasien dirawat inap maka kemungkinan untuk sembuh semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

- Kleinbaum, D.G. dan Mitchel Klein. (2005). *Survival Analysis: a self-learning text*. New York: Spinger.
- Zhao, G. (2008). *Nonparametric and Parametric Survival Analysis of Censored Data with Possible Violation of Method Assumption*. Greensboro: University of North Carolina.
- Thamrin, S. A. (2008). Penggunaan Model Resiko Proportional Cox dengan Pendekatan Bayesian Semiparametrik Menggunakan Prior Proses Gamma. *Jurnal Paradigm* 2, pp (29-38).
- Departemen Kesehatan. (2006). *Pedoman Penanggulangan KLB-DBD bagi Keperawatan di RS dan Puskesmas*. Jakarta: Direktorat Bina Pelayanan Medik Departemen Kesehatan.
- Klienbaum, D. G. (1996). *Survival Analysis: a self learning text*. Springer-Verlag. New York.
- Kleinbaum, D. G. & Klein, M. (2011). *Survival Analysis*. New York.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Life Time Data*. Canada: John Wiley and Sons.
- Tiro, M.A., Sukarna, & Aswi. (2008). *Pengantar Teori Peluang*. Makassar: Andira Publisher.
- Ntzoufras, I. (2009). *Bayesian Modeling Using Winbugs*, John Wiley and Soncs, Inc., USA.
- Box, G.E.P. dan Tiao, G.C. 1973. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc: Philippines.
- Soejoeti, Z & Soebanar. (1988). *Inferensi Bayesian*. Karunika Universitas Terbuka: Jakarta.
- Nisa & Bidiantara. (2012). *Analisis Survival dengan Pendekatan Multivariate Adaptif Regression Spliner pada kasus Demam Berdarah Dengue (DBD)*. Surabaya: Insitu Teknologi Sepuluh November.
- Departemen Kesehatan. (2006). *Profil Kesehatan Indonesia 2008*. Jakarta: Depker RI.
- Ibrahim, J.G., Chen, M.H., Sinha, Degajyoti. (2001). *Bayesian Survival Analysis*. Springer: USA.