Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 102 – 113)
Vol. 6. No. 2, Oktober 2023
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Kendali Optimal pada Penyebaran Penyakit Covid-19 berdasarkan model SIVRS

Ratna Widayati[1, a)], Mizan Ahmad[1, b)], dan Noor Sofiyati[2, c)]

[1]*Program Studi Matematika FMIKOM Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali Cilacap*
[2] *Program Studi Matematika FST Universitas Nahdlatul Ulama Purwokerto*

[a)]ratnawidayati1708@gmail.com
[b)]mizan.ahmad36@gmail.com
[c)]noor.sofiyati@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini membahas mengenai kendali optimal pada penyebaran penyakit Covid-19 dengan asumsi terdapat subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 varian baru. Penularan dapat terjadi antara individu pada subpopulasi rentan dan individu pada subpopulasi terinfeksi Covid-19. Model yang digunakan SIVRS dengan mengasumsikan terdapat kendali berupa strategi vaksinasi yang diberikan pada individu rentan. Tujuan dari penelitian ini adalah meminimumkan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi terinfeksi varian baru. Analisa mengenai solusi kendali optimal dilakukan dengan fungsi Hamiltonian kemudian dilakukan penyelesaian secara numerik menggunakan metode Sweep Maju Mundur pada Matlab. Diperoleh hasil bahwa strategi vaksinasi yang dijalankan dapat meminimumkan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dan terinfeksi varian baru.*
Kata Kunci: *Kendali Optimal, Penyebaran Covid-19, model SIVRS.*

Abstract. *This study discusses about optimal control for spread of Covid-19 disease with the assumption that there is a subpopulation of individuals infected with the new variant of Covid-19. Transmission can occur between individuals in susceptible subpopulations and individuals in subpopulations infected with Covid-19. SIVRS model is used by assumes that there is control variable in the form of the vaccination strategy given to susceptible individuals. This study aims to minimize the number of individuals in the subpopulation infected and infected with the new variant. An analysis of the optimal control solution was carried out using the Hamiltonian function and then solving it using the Sweep Forward and Back method in Matlab. The results show that the vaccination strategy implemented can minimize the number of individuals in the subpopulation infected and infected with the new variant.*
Keywords: *Optimal Control, Spread of Covid-19, SIVRS model.*

PENDAHULUAN

Penyakit menular merupakan salah satu ancaman bagi kesehatan individu (Zhang dkk., 2021). Penularan yang tinggi menjadi masalah serius di wilayah tempat penyakit tersebut menyebar. Tidak hanya bagi manusia, penyakit menular juga dapat menyerang hewan. Contohnya *Lumpy Skin Disease* (LDS) yang menyerang sapi. Penyakit tersebut menjadi masalah yang serius ketika Hari Raya Idul Adha datang, karena sapi merupakan hewan yang akan dijadikan kurban pada saat itu. Selain itu, penyakit menular lain yang menjadi epidemi pada abad ke 21 diataranya SARS, EBOLA dan H1NI (El Bhih dkk., 2020).

Epidemi terkini yang menimbulkan kematian populasi manusia adalah Covid-19 yang berawal dari kota Wuhan China pada akhir tahun 2019. Virus penyebab Covid-19 adalah virus SARS yang mengalami perubahan genetik. Virus baru ini lebih berbahaya dari SARS sebelumnya dan MERS (Kouidere dkk., 2023). Per tanggal 9 Mei 2020, lebih dari 3,95 juta kasus telah dilaporkan di 187 negara dan wilayah serta mengakibatkan lebih dari 275.000 kematian (El Bhih dkk., 2020).

Gejala COVID-19 yang paling umum adalah demam, kelelahan, dan batuk kering. Beberapa pasien mungkin mengalami nyeri, pilek, sakit tenggorokan atau hidung tersumbat. Penyakit COVID-19 menyebar melalui banyak cara seperti berjabat tangan dengan orang yang terinfeksi, bersin, dll (Kouidere dkk., 2021). Pada perkembangannya, Covid-19 varian baru banyak bermunculan seperti Omicron, Beta, Alpha dll. Kemunculan Covid-19 varian baru tersebut terjadi akibat perubahan genetik yang cepat terjadi pada virus SARS Cov-2.

Penyebaran Covid-19 menjadikan bahaya yang besar jika tidak dikendalikan. Pengendalian yang dilakukan pemerintah diantaranya dengan memberikan edukasi mengenai jaga jarak, tidak berkerumun, memakai masker, isolasi mandiri di rumah. Selain itu, pengendalian yang cukup ampuh untuk menekan kasus Covid-19 adalah vaksin yang ada setelah melalui proses panjang oleh para peneliti dalam bidang farmasi. Vaksin Covid-19 yang ada di Indonesia diantaranya Pfizer, Astrazeneca, Moderna, Sinovac dll.

Penelitian mengenai penyebaran Covid-19 dengan pengendalian telah dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya El Bhih dkk.(2020) membahas mengenai pemodelan matematika berbentuk diskrit pada penularan Covid-19 menggunakan 4 kendali yaitu edukasi pada individu rentan dan 3 jenis karantina pada individu yang terinfeksi. Pemodelan pada waktu diskrit dilakukan pula oleh Kouidere dkk., (2020) yang membahas mengenai pencegahan individu berpindah dari satu wilayah ke wilayah lainnya. Kouidere dkk.(2020) dalam penelitiannya membahas mengenai pengendalian pada individu yang terinfeksi dengan karantina. Model yang digunakan dengan mengsumsikan individu terinfeksi dibagi menjadi individu terinfeksi dengan gejala dan tanpa gejala. Selain itu, Kouidere dkk.(2023) meneliti mengenai kendali optimal dari model matematika penyebaran Covid-19 di negara Peru. Kendali yang digunakan adalah edukasi dan karantina. Selanjutnya Xu dkk.(2017) dalam penelitiannya membahas mengenai kendali optimal dengan menggunakan model SIVRS dengan mengasumsikan terdapat populasi individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru. Akan tetapi Xu dkk.(2017) tidak menambahkan faktor kematian karena Covid-19 varian baru. Selain itu, Xu dkk.(2017) mengusulkan pengendalian dengan 3 kendali yaitu pengobatan, karantina dan vaksin. Selain itu, Khajji dkk.(2020) membahas mengenai model diskrit pada penyebaran Covid-19 dengan menyertakan variabel kendali di beberapa wilayah.

Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian Widayati (2023) yang membahas mengenai analisa kestabilan global pada penyebaran penyakit Covid-19. Akan tetapi, Widayati (2023) dalam penelitiannya hanya membahas mengenai analisa kestabilan tanpa menggunakan variabel kendali, sedangkan pada kenyataannya, Covid-19 perlu untuk dikendalikan. Oleh karena itu, pada penelitian ini mengusulkan model penyebaran Covid-19 berbentuk SIVRS dengan mengasumsikan terdapat kelas populasi infeksi Covid-19 varian baru dan terdapat kematian karena Covid-19 dan kematian karena Covid-19 varian baru dengan kendali berupa vaksin yang bergantung pada waktu. Kendali yang digunakan hanya vaksin dengan tujuan meminimalkan individu pada subpopulasi terinfeksi dan terinfeksi varian baru.

KAJIAN PUSTAKA

Persamaan Deferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross). Berikut ini akan diberikan definisi mengenai persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 1. (Ross, L., 1984).

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Contoh 1:

$$\frac{dx}{dt} = 2x.$$

Definisi 2. (Ross, L., 1984).

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh 2:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Jika notasi $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ menyatakan turunan x terhadap t, maka

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}..$$

Diberikan sistem autonomous

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

yaitu suatu sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang implisit dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $f : L \to \mathbb{R}^n$, L merupakan himpunan terbuka dan $f \in C^1(L)$. Sistem (1) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai solusi sistem persamaan diferensial.

Definisi 3. (Perko, L. 2001).

Diberikan $f \in C(L)$ dengan L himpunan terbuka di $\mathbb{R}^n$. Selanjutnya $x(t)$ disebut solusi dari Sistem (1) pada interval I, jika $x(t)$ dapat diturunkan pada I, $\forall t \in I, x(t) \in L$ dan berlaku

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Definisi 4. (Perko, L. 2001).

Diberikan $f \in C(L)$ yang dilengkapi dengan nilai awal $x_0 \in L$, dengan L himpunan terbuka dan diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vektor $x(t) = x(x_0(t))$ disebut solusi dari Sistem (2) pada interval I, jika $t_0 \in I$ dan $x(t_0) = x_0$.

Lebih lanjut, berdasarkan Widayati. R (2013), persamaan diferensial dikatakan nonlinier jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria sebagai berikut

a. Memuat variabel tak bebas dan turunan-turunannya berpangkat selain satu.
b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
c. Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

Contoh 3:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 x_2 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 + x_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem (3) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x_1 dan x_2. Sistem (3) disebut sistem persamaan diferensial nonlinier karena terdapat perkalian antara variabel tak bebas x_1 dan x_2 di persamaan pertama serta terdapat kuadrat dari variabel tak bebas x_1 di persamaan kedua. Persamaan diferensial nonlinier sulit dicari solusinya secara analitik.

Kendali Optimal

Kendali optimal bertujuan untuk menentukan hasil yang paling optimal dengan memperhatikan kondisi dan kendala yang ada pada sistem (Ningtias T. H. A., 2017). Pada masalah kendali optimal dengan sistem persamaan diferensial biasa, variabel kendali dinotasikan dengan $u(t)$ dan variabel *state* dinotasikan dengan $x(t)$ yang dapat dinyatakan dengan

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \tag{4}$$

Masalah kendali optimal adalah menentukan $u^*(t)$ yang bersesuaian dengan variabel *state* $x(t)$ yang memberikan nilai optimal pada fungsi tujuan. Masalah kendali optimal dapat dinyatakan sebagai berikut:

Memaksimumkan/meminimumkan

$$J\left(u(t)\right)=\int_{0}^{T} f\left(t,x(t),u(t)\right)dt \tag{5}$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t)=g\left(t,x(t),u(t)\right)$$

dan nilai awal $x(0)=x_0$.

Variabel $u^*(t)$ disubstitusikan kedalam persamaan *state* dan *costate* yang dapat diselesaikan dengan cara numerik menggunakan program Matlab dengan parameter tertentu.

Persamaan *costate* yang diperlukan untuk mencari solusi sistem, dicari menggunakan fungsi Hamilton. Fungsi Hamiltonian pada kendali optimal didefinsikan sebagai

$$H(t,x,u,\alpha)= f(t,x,u)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i(t,x,u) \tag{6}$$

dengan f merupakan integran dari fungsi objektif dan g merupakan persamaan *state.* Kemudian digunakan Prinsip Pontryagin yang menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi optimal dengan kendali u yang dapat memunimumkan fungsi Hamiltonian (6) pada saat t. Selanjutnya jika u^* dan x^* adalah nilai yang optimal untuk masalah optimisasi (5), maka terdapat variabel *costate* α sedemikian sehingga untuk masalah meminimumkan

$$H(t,x^*,u,\alpha)\geq H(t,x^*,u^*,\alpha).$$

Persamaan *state* dari fungsi Hamiltonian (6) dapat dinyatakan sebagai

$$g_i(t,x,u)=\frac{\partial H}{\partial \alpha_i}.$$

Kemudian persamaan *costate* merupakan negatif dari turunan fungsi Hamiltonian (6) terhadap masing-masing variabel *state* yang dapat dinyatakan sebagai

$$\alpha_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Jadi, berdasarkan fungsi Hamiltonian (6), prinsip minimum Pontryagin yang digunakan pada masalah kendali optimal (5) meliputi beberapa komponen yaitu

(i). $H(t,x^*,u,\alpha)\geq H(t,x^*,u^*,\alpha)$ untuk setiap $t\in[0,T]$,

(ii). $g_i(t,x,u)=\dfrac{\partial H}{\partial \alpha_i}$ persamaan *state*

(iii). $\alpha_i=-\dfrac{\partial H}{\partial x_i}$ persamaan *costate*

Kemudian jika fungsi Hamiltonian dapat diturunkan terhadap u, maka kondisi (i) dapat digantikan oleh

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0.$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan jenis penelitian studi literatur terapan. Penelitian terdahulu dipelajari sebagai bahan pertimbangan asumsi yang dimunculkan pada model. Asumsi-asumsi digunakan untuk menyederhanakan model. Akan tetapi, asumsi dibuat mendekati model sebenarnya. Objek kajian pada penelitian ini merupakan individu pada subpopulasi-subpopulasi yang didefinisikan beserta keterkaitannya antar setiap subpopulasi.

Tahapan yang dilakukan pada penelitian ini antara lain

1. Mengumpulkan informasi mengenai model penyebaran penyakit Covid-19 dengan penelitian terbaru.
2. Menganalisa variabel apa yang dapat ditambahkan pada model guna menekan laju penularan Covid-19.
3. Menganalisa model yang diperoleh dengan kendali optimal.
4. Melakukan simulasi numerik pada model yang telah ditambahkan kendali optimal.

HASIL PENELITIAN

Formulasi Model

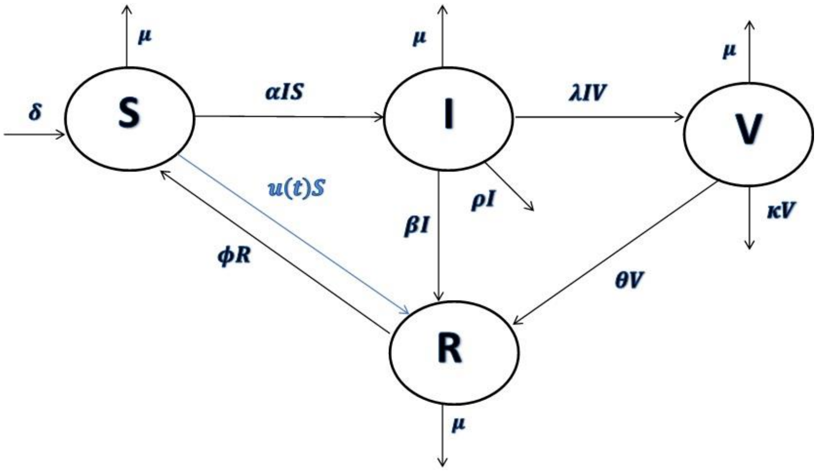
Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai pembentukan model matematika pada penyebaran Covid-19 dengan mengasumsikan populasi dibagi kedalam 4 subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan (S), subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 (I), subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 varian baru (V) dan subpopulasi individu sembuh (R). Pada penelitian ini diasumsikan terdapat variabel kendali $u(t)$ yang menyatakan proporsi populasi individu rentan yang diberi vaksin pada saat t. Asumsi-asumsi yang digunakan untuk menyederhanakan model diantaranya:

1. Bayi yang lahir masuk ke subpopulasi S sebagai individu yang rentan Covid-19.
2. Covid-19 dapat menular antara individu pada subpopulasi rentan dan individu pada subpopulasi terinfeksi Covid-19.
3. Individu yang masuk subpopulasi terinfeksi Covid-19 varian baru tertular dari inidividu pada subpopulasi terinfeksi Covid-19.
4. Individu yang terinfeksi Covid-19 dan individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru dapat sembuh dan memperoleh kekebalan sementara kemudian kembali rentan.
5. Kendali berupa vaksin dikenakan pada subpopulasi individu rentan.

Berikut ini didefisikan parameter-parameter yang digunakan dalam model.

- δ menyatakan laju kelahiran,
- μ menyatakan laju kematian alami,
- α menyatakan laju penularan antara individu rentan dengan individu terinfeksi Covid-19,
- λ menyatakan laju penularan antara individu terinfeksi Covid-19 dengan individu terinfeksi Covid-19 varian baru,
- ρ menyatakan laju kematian karena Covid-19,
- κ menyatakan laju kematina karena Covid-19 varian baru,
- β menyatakan laju kesembuhan individu yang terinfeksi Covid-19,
- θ menyatakan laju kesembuhan individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru,
- ϕ menyatakan laju individu yang telah sembuh kemudian menjadi rentan.

Berdasarkan asumsi-asumsi dan parameter yang telah didefinsikan, dapat digambarkan diagram transfer sebagai berikut:



GAMBAR 1. Diagram Transfer Model SIVRS

Berdasarkan Gambar 1, diperoleh model matematika penyebaran Covid-19 dengan kendali berupa vaksin sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \delta + \phi R(t) - \mu S(t) - \alpha I(t)S(t) - u(t)S(t) \quad (7.a)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha I(t)S(t) - \mu I(t) - \lambda I(t)V(t) - \rho I(t) - \beta I(t) \quad (7.b)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = \lambda I(t)V(t) - \mu V(t) - \kappa V(t) - \theta V(t) \quad (7.c)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \theta V(t) - \mu R(t) + \beta I(t) - \phi R(t) + u(t)S(t), \quad (7.d)$$

dengan $S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, V(0) = V_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0$ dan batasan untuk variabel kendali $u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$.

Selanjutnya tujuan dari model matematika yang dibentuk pada Sistem (7) adalah meminimumkan individu pada subpopulasi terinfeksi Covid-19 dan terinfeksi Covid-19 varian baru. Oleh karena itu, didefinisikan $[0, t_f]$ sebagai periode waktu ketika strategi kendali optimal dikenakan pada Sistem (7), sehingga dibentuk fungsi objektif dengan variabel keputusan $u(t)$ pada $0 \leq t \leq t_f$ sebagai berikut

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} \left(c_1 S(t) + c_2 I(t) + c_3 V(t) + \frac{1}{2}\tau u^2(t) \right) dt, \quad (8)$$

dengan c_1, c_2, c_3 merupakan kontanta positif pembobot $S(t), I(t), V(t)$ dan τ merupakan kontanta pembobot untuk variabel kendali $u(t)$ yang juga bernilai positif.

Solusi Kendali Optimal

Solusi kendali optimal akan dijelaskan melalui Lemma berikut ini.

Lemma 1. Jika $S^*(t), I^*(t), V^*(t)$ dan $R^*(t)$ merupakan solusi dari Sistem (7), maka solusi kendali optimal untuk Sistem (7) adalah

$$u^*(t)=\max\left\{\min\left\{\frac{a_1S^*(t)-a_4S^*(t)}{\tau},u_{\max}\right\},u_{\min}\right\}.$$

Bukti.Didefinisikan fungsi Lagrangian

$$L(S,I,V,u)=c_1S(t)+c_2I(t)+c_3V(t)+\frac{1}{2}\tau u^2(t) \tag{9}$$

dari Sistem (7) dang fungsi Hamiltonian yang bersesuaian dengan Sistem (7) adalah

$$\begin{aligned}H(S,I,V,R,u,a_1,a_2,a_3,a_4,t)=c_1S(t)+c_2I(t)+c_3V(t)+\frac{1}{2}\tau u^2(t)+&\\ a_1\left(\delta+\phi R(t)-\mu S(t)-\alpha I(t)S(t)-u(t)S(t)\right)+&\\ a_2\left(\alpha I(t)S(t)-\mu I(t)-\lambda I(t)V(t)-\rho I(t)-\beta I(t)\right)+&\\ a_3\left(\lambda I(t)V(t)-\mu V(t)-\kappa V(t)-\theta V(t)\right)+&\\ a_4\left(\theta V(t)-\mu R(t)+\beta I(t)-\phi R(t)+u(t)S(t)\right),&\end{aligned} \tag{10}$$

dengan $a_{i=1,2,3,4}$ merupakan pengali Lagrange. Kemudian diperoleh persamaan *state* sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial a_1}=\delta+\phi R(t)-\mu S(t)-\alpha I(t)S(t)-u(t)S(t) \tag{11.a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2}=\alpha I(t)S(t)-\mu I(t)-\lambda I(t)V(t)-\rho I(t)-\beta I(t) \tag{11.b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_3}=\lambda I(t)V(t)-\mu V(t)-\kappa V(t)-\theta V(t) \tag{11.c}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_4}=\theta V(t)-\mu R(t)+\beta I(t)-\phi R(t)+u(t)S(t). \tag{11.d}$$

Selanjutnya diperoleh persamaan *costate*

$$-\frac{\partial H}{\partial S}=-\left(c_1-\mu a_1-\alpha I(t)a_1-u(t)a_1+\alpha I(t)a_2+u(t)a_4\right) \tag{12.a}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial I}=-\left(c_2-\alpha S(t)a_1+\alpha S(t)a_2-\mu a_2-\lambda V(t)a_2-\rho a_2-\beta a_2+\lambda V(t)a_3+\beta a_4\right) \tag{12.b}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial V}=-\left(c_3-\lambda I(t)a_2+\lambda I(t)a_3-\mu a_3-\kappa a_3-\theta a_3+\theta a_4\right) \tag{12.c}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial R}=-\left(\phi a_1-\mu a_4-\phi a_4\right). \tag{12.d}$$

Lebih lanjut, solusi kendali optimal dari Sistem (7) adalah

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial u}=0\\ &\Leftrightarrow \tau u(t)-a_1S(t)+a_4S(t)=0\\ &\Leftrightarrow u(t)=\frac{a_1S(t)-a_4S(t)}{\tau},\end{aligned} \tag{13}$$

sehingga diperoleh kendali optimal

$$u^*(t) = \max\left\{\min\left\{\frac{a_1 S^*(t) - a_4 S^*(t)}{\tau}, u_{\max}\right\}, u_{\min}\right\}. \tag{14}$$

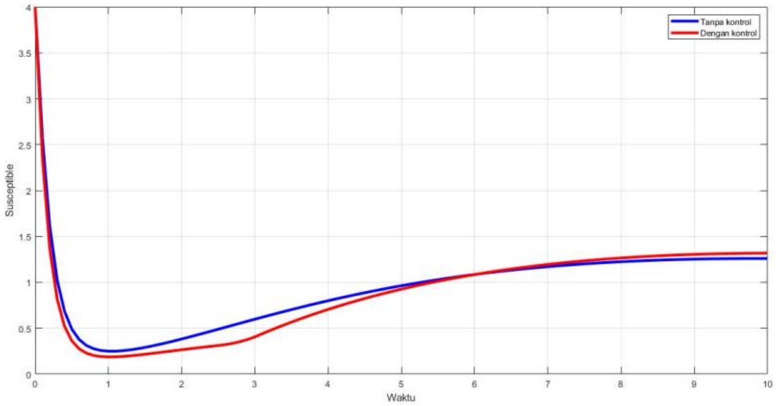
Simulasi Numerik

Solusi kendali optimal yang diperoleh dari Lemma 1, Persamaan *state* (11) dan persamaan *co-state* (12) dapat diselesaikan dengan metode Sweep Manju Mundur menggunakan Matlab dengan batasan nilai parameter. Nilai-nilai parameter dapat dilihat pada tabel berikut ini:

TABEL 1. Nilai parameter

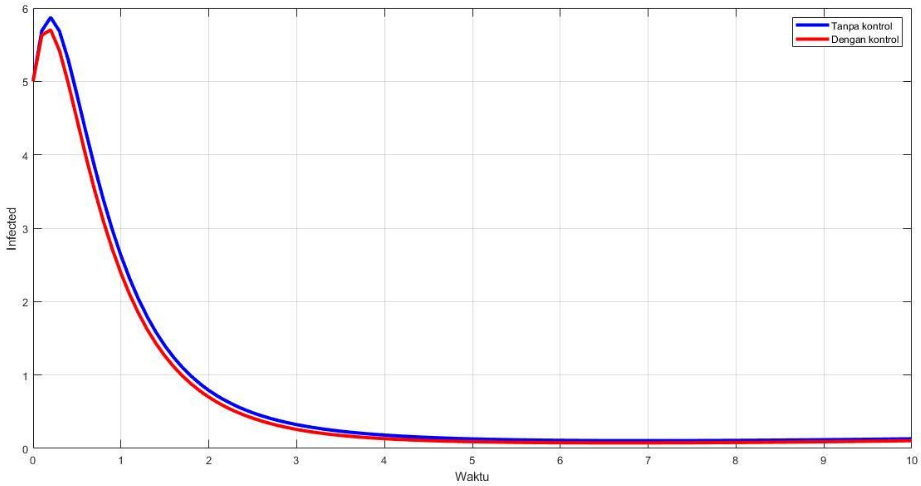
Parameter	Nilai	Sumber
δ	0,5	Xu dkk.(2017)
α	0,8	Xu dkk (2017)
ϕ	0,001	Xu dkk (2017)
μ	0,3	Xu dkk (2017)
β	0,5	Xu dkk (2017)
θ	0,2	Widayati (2023)
κ	0,02	Widayati (2023)
ρ	0,09	Widayati (2023)
λ	0,2	Xu dkk (2017)
$u_{\max}$	0,9	Xu dkk (2017)
τ	0,01	Xu dkk (2017)
c_1	0,1	Xu dkk (2017)
c_2	0,2	Xu dkk (2017)
c_3	0,1	Xu dkk (2017)

Selanjutnya diperoleh solusi yang direpresentasikan pada gambar-gambar berikut ini:



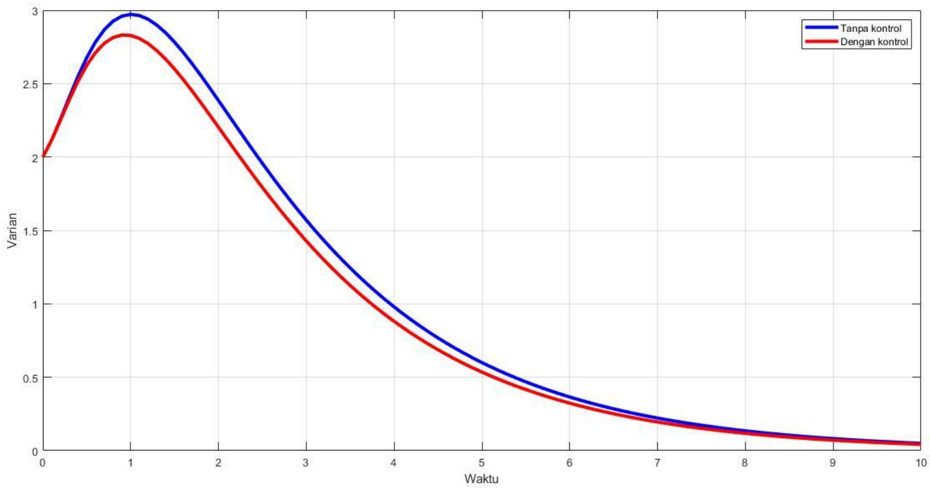
GAMBAR 2. Subpopulasi individu rentan Covid-19

Gambar 2 merepresentasikan subpopulasi individu yang rentan Covid-19 dengan kontrol dan tanpa kontrol dengan nilai awal $S(0)=4$. Dapat dilihat bahwa jumlah individu rentan Covid-19 dengan kontrol berupa vaksin meningkat melebihi jumlah individu rentan Covid-19 tanpa kontrol pada saat setelah $t=7$. Artinya strategi vaksinasi pada individu yang rentan berhasil menaikkan populasi individu rentan Covid-19. Kemudian Gambar 3 untuk subpopulasi individu yang terinfeksi Covid-19.



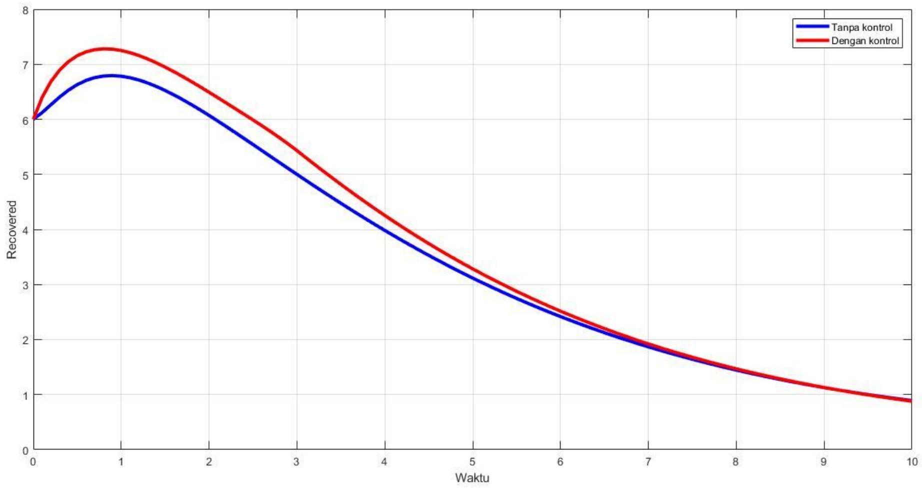
GAMBAR 3. Subpopulasi individu terinfeksi Covid-19

Gambar 3 merepresentasikan subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 dengan kontrol dan tanpa kontrol dengan nilai awal $I(0)=5$. Dapat dilihat bahwa strategi vaksin yang dijalankan menjadikan jumlah subpopulasi terinfeksi Covid-19 lebih cepat menurun pada waktu yang sama.



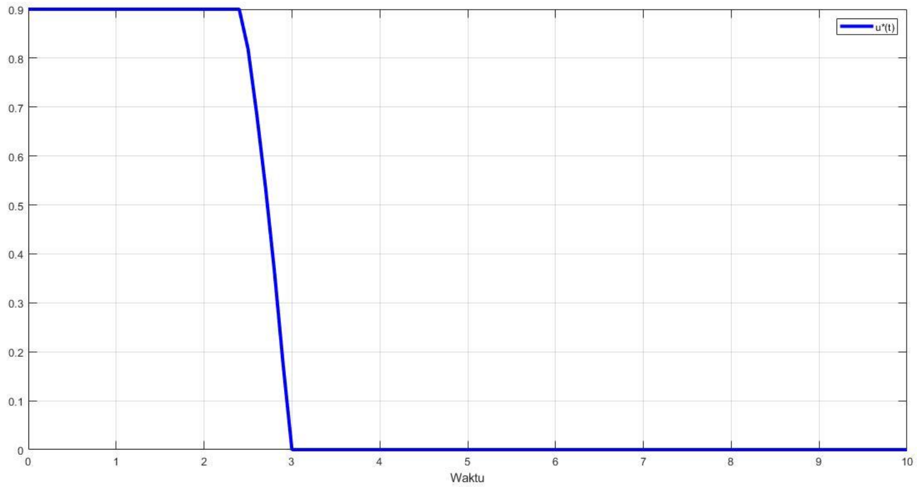
GAMBAR 4. Subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 varian baru

Gambar 4 merepresentasikan subpopulasi individu terinfeksi Covid-19 varian baru dengan kontrol dan tanpa kontrol dengan nilai awal $V(0)=2$. Dapat dilihat bahwa strategi vaksin yang dijalankan menjadikan jumlah subpopulasi terinfeksi Covid-19 varian baru lebih cepat menurun pada waktu yang sama.



GAMBAR 5. Populasi individu sembuh

Gambar 5 merepresentasikan subpopulasi individu yang sembuh dari Covid-19 dengan kontrol dan tanpa kontrol dengan nilai awal $R(0)=6$. Dapat dilihat bahwa jumlah individu sembuh Covid-19 dengan kontrol berupa vaksin menjadikan jumlah subpopulasi sembuh lebih cepat menurun pada waktu yang sama.



GAMBAR 6. Kendali berupa vaksin

Gambar 6 merupakan profil kendali berupa vaksin yang diberikan kepada individu rentan Covid-19. Berdasarkan Gambar 6, kendali berupa vaksin digunakan dengan maksimal 0,9 sesuai dengan batasan nilai maksimal kendali. Kemudian beberapa saat semakin menurun dengan tercapainya target menurunkan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi Covid-19 dan Covid-19 varian baru.

KESIMPULAN

Diberikan model matematika pada penyebaran penyakit Covid-19 dan Covid-19 varian baru disertai kendali berupa vaksin yang diberikan pada individu rentan seperti pada Sistem (1). Analisa solusi kendali optimal dilakukan dengan fungsi Hamiltonian diperoleh persamaan *state*, *co-state* dan kendali optimal. Selanjutnya persamaan-persamaan tersebut diselesaikan dengan metode Sweep Maju Mundur memberikan kesimpulan bahwa strategi vaksinasi yang diberikan pada individu rentan berhasil meminumumkan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi Covid-19 dan Covid-19 varian baru.

DAFTAR PUSTAKA

Bhih A. E., Benfatah Y., Kouidere A. dan Rachik M., 2020, A Discrete Mathematical Modeling of Transmission of Covid-19 Pandemic using Optimal Control, *Commun. Math. Biol. Neurosci*, 75, 2052-2541.

Khajji. B., Kada. D., Balatif. O. dan Rachik. M., 2020, Amulti-region discrete time mathematical modeling of the dynamics of Covid-19 virus propagation using optimal control, *Journal of Applied Mathematics and Computing,* 64:255–281.

Kouidere A., Khajji B., Bhih A E., Balatif O. dan Rachik M., 2020, A Mathematical Modeling with Optimal Control Strategy of Transmission of Covid-19 Pandemic Virus, *Commun. Math. Biol. Neurosci*, 24: 2052-2541.

Kouidere A., Youssoufi. L. E., Ferjouchia. H dan Balatif. O., 2021, Optimal Control of Mathematical modeling of the spread of the COVID-19 pandemic with highlighting the negative impact of quarantine on diabetics people with Cost-effectiveness, *Chaos, Solitons and Fractals*, 145.

Kouidere A., Balatif. O. dan Rachik. M.,2023, Cost-effectiveness of a mathematical modeling with optimal control approach of spread of COVID-19 pandemic: A case study in Peru, Chaos, 10, *Solitons & Fractals: X*.

Ningtias. T. H. A (2017). Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Virus Hepatitis B dengan Vaksinasi dan Pengobatan (Skripsi). Universitas Brawijaya. Malang.

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd. New York: Springer

Ross, L. (1984). *Differential Equations*. 3rd. New York. Springer.

Widayati. R (2013). Pemodelan Matematika untuk Penyebaran Penyakit Flu Singapura (Hand, Foot And Mouth Disease) Berdasarkan Model SEIRS (Skripsi, tidak dipublikasikan). Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta.

Widayati R., 2023, Global Stability of Covid-19 Disease Free Based on Sivrs Model, *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi,* Vol. 19, pp. 400-411.

Xu D., Xu X., Xie Y. dan Yang C., 2017, Optimal control of an SIVRS epidemic spreading model with virus variation based on complex networks, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,* 48, 200-210.

Zhang L., Liu M. dan Xie B., 2021, Optimal control of an SIQRS epidemic model with three measures on networks, Nonlinear Dynamics, 103: 2097–2107.