Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 149 – 160)
Vol. 6. No. 2, Oktober 2023
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Penyelesaian Model Epidemiologi SIR Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Tiga dan Metode Adams-Bashforth Orde Tiga

Jeannie Hadisusanto[1, a)] dan Sudi Mungkasi[2, b)]

[1]*Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta*
[2]*Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta*

[a)] jeannie.xii.elisha.13.06@gmail.com
[b)] sudi@usd.ac.id

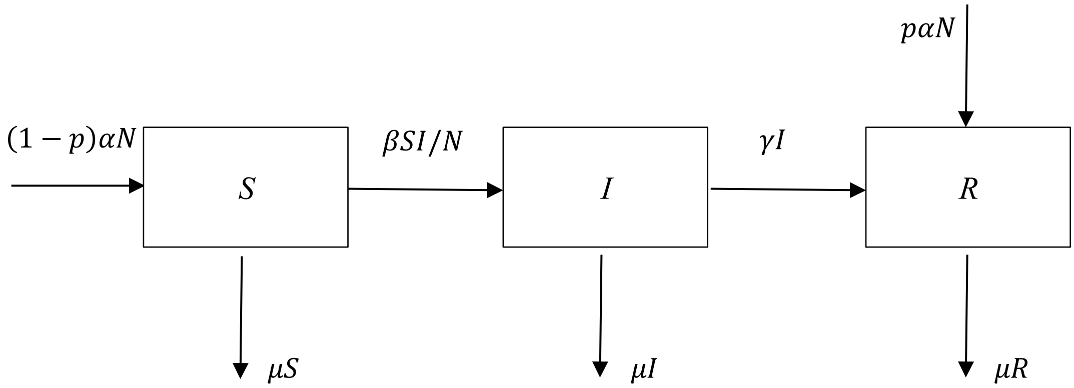
Abstrak. *Pemodelan matematika dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah dapat memprediksi situasi yang terjadi pada penyebaran penyakit menular. Dalam makalah ini, model yang digunakan adalah model epidemiologi SIR dengan vaksinasi konstan. Model tersebut diselesaikan secara numeris dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga. Solusi dari kedua metode tersebut diperoleh dengan bantuan program MATLAB pada iterasi pertama hingga iterasi kesepuluh. Solusi yang ditunjukkan oleh kedua metode tersebut memiliki perilaku yang hampir sama pada jumlah populasi yang rentan terkena penyakit, jumah populasi yang terinfeksi penyakit, dan jumlah populasi yang sembuh dari penyakit. Seiring dengan berjalannya waktu, jumlah populasi yang rentan terkena penyakit akan terus berkurang, sedangkan jumlah populasi yang sembuh dari penyakit akan terus bertambah. Sementara itu, jumlah populasi yang terinfeksi penyakit akan sempat mengalami kenaikan di awal dan kemudian akan terus berkurang.*
Kata Kunci: *model epidemiologi SIR, metode Runge-Kutta, metode Adams-Bashforth*

Abstract. *Mathematical modeling can be used to solve problems in everyday life, one of which is being able to predict situations that occur in the spread of infectious diseases. The model used is the SIR epidemiological model with constant vaccination. In this paper, the model was solved numerically using the third order Runge-Kutta method and the third order Adams-Bashforth method. The solutions of the two methods were obtained with the help of the MATLAB program in the first to tenth iterations. The solutions shown by the two methods have almost the same behavior in the number of populations that are susceptible to disease, the number of populations infected with the disease, and the number of populations that have recovered from the disease. Over time, the number of populations that are susceptible to disease will continue to decrease, while the number of people recovering from disease will continue to increase. Meanwhile, the number of population infected with the disease will gradually increase at first and then will continue to decrease.*
Keywords: *SIR epidemiological model, Runge-Kutta method, Adams-Bashforth method*

PENDAHULUAN

Saat ini, pemodelan matematika terus berkembang seiring dengan perkembangan teknologi. Ada beragam jenis masalah nyata yang dapat diselesaikan atau dianalisis melalui pemodelan matematika, salah satunya adalah masalah penyebaran penyakit menular (Widowati & Sutimin, 2007). Masalah penyakit menular perlu segera diatasi karena tidak hanya membahayakan orang yang terinfeksi penyakit, tetapi juga membahayakan orang lain di sekitarnya yang dapat tertular penyakit. Ada beragam jenis penyakit menular yang dapat menyerang manusia, misalnya penyakit yang banyak menyerang anak-anak yaitu cacar air, campak, gondok, dan lain sebagainya. Penyakit menular yang biasanya menyerang anak-anak tersebut jika tidak segera diatasi, maka akan menyebar dengan cepat. Hal tersebut dikarenakan anak-anak lebih banyak melakukan kontak fisik dengan teman-temannya ataupun orang lain, misalnya saat sedang bermain bersama. Selain itu, orang yang terinfeksi penyakit menular tersebut memerlukan waktu yang cukup lama untuk sembuh sehingga akan mengganggu aktivitas mereka, misalnya mereka perlu izin tidak masuk sekolah selama beberapa hari. Oleh karena itu, masalah penyebaran penyakit menular perlu segera diatasi dengan melakukan analisis lebih lanjut melalui pemodelan matematika guna menekan penyebaran penyakit yang semakin luas.

Pemodelan matematika yang digunakan dalam penelitian ini untuk menganalisis penyebaran penyakit menular adalah model epidemiologi SIR. Hal ini dikarenakan model SIR merupakan model yang sederhana dan dapat memberikan gambaran mengenai laju penyebaran penyakit menular (Ma & Li, 2009). Model SIR merupakan model yang membagi populasi ke dalam tiga kelompok yaitu kelompok orang yang rentan terkena penyakit (*susceptible*), kelompok orang yang terinfeksi penyakit (*infected*), dan kelompok orang yang sembuh dari penyakit (*recovered*). Kemudian, salah satu upaya yang dilakukan oleh pihak medis dalam menekan penyebaran penyakit menular adalah dengan penemuan dan pemberian vaksin. Oleh karena itu, peneliti memilih modifikasi model SIR yang mempertimbangkan banyak orang yang telah divaksin sejak lahir seperti pada penelitian Makinde (2007) yang ditunjukkan pada Gambar 1.



GAMBAR 1. Diagram Alir Model Epidemiologi SIR

Berdasarkan diagram alir pada Gambar 1, sistem persamaan diferensial yang dapat dibuat adalah:

$$\frac{dS}{dt} = (1-p)\alpha N - \beta\frac{SI}{N} - \mu S \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{SI}{N} - (\gamma+\mu)I \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = p\alpha N + \gamma I - \mu R \tag{3}$$

dimana $S = S(t)$ merepresentasikan kelompok orang yang rentan (*susceptible group*), $I = I(t)$ menyatakan kelompok orang yang terinfeksi (*infected group*), $R = R(t)$ adalah kelompok orang yang bebas dari infeksi termasuk orang yang telah divaksin dan orang yang telah sembuh dengan kekebalan yang permanen, serta *t* merupakan variabel waktu. Selain itu, vaksinasi diasumsikan

100% efektif. Parameter p merepresentasikan proporsi dari orang yang telah divaksin saat lahir setiap tahun, dimana $0 < p < 1$; sisanya memiliki proporsi $1 - p$ adalah rentan (*susceptible*). Parameter α merepresentasikan tingkat kelahiran. Parameter β adalah rata-rata dari tingkat kontak antara individu yang rentan dan individu yang terinfeksi, dimana individu yang rentan akan berpeluang berpindah ke dalam kelompok yang terinfeksi ketika individu yang rentan tersebut memiliki kontak dengan individu yang terinfeksi. Parameter γ adalah tingkat pemulihan individu yang terinfeksi untuk masuk ke dalam kelompok yang bebas dari infeksi. Tingkat kematian secara alami dinyatakan dengan μ, dimana tingkat kematian tersebut tidak sama dengan tingkat kelahiran α.

Parameter $p, \alpha, \beta, \gamma, \mu$ merupakan konstanta yang bernilai positif. Di sini, total populasi *N* bervariasi terhadap waktu *t* dengan $N = S + I + R$. Selain itu, diasumsikan bahwa $\alpha \neq \mu$. Untuk membuktikan bahwa total populasi *N* tidak konstan, kita dapat menambahkan persamaan (1)-(3) sehingga memperoleh

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \mu)N \tag{4}$$

Pada saat kita menskalakan setiap kelompok dengan total populasi, maka kita memperoleh variabel baru $x = \frac{S}{N}, y = \frac{I}{N}, z = \frac{R}{N}$. Variabel baru tersebut akan menormalisasikan setiap kelompok, sehingga $x + y + z = 1$. Dengan mengetahui persamaan (4) dan mensubsitusikan $S = xN,\ I = yN,\ R = zN$ ke dalam persamaan (1)-(3), kita memperoleh sistem yang dinormalisasi untuk model SIR sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - p)\alpha - \beta xy - \alpha x \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - (\gamma + \alpha)y \tag{6}$$

$$\frac{dz}{dt} = p\alpha + \gamma y - \alpha z \tag{7}$$

Model penyebaran penyakit menular yang telah terbentuk perlu diselesaikan secara matematis agar peneliti dapat memperoleh kesimpulan yang bermakna. Model SIR secara umum akan membentuk suatu sistem persamaan diferensial non-linier sehingga perlu diselesaikan secara matematis melalui metode numerik ataupun secara analitik. Metode numerik merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah yang diformulasikan secara matematis sehingga menghasilkan solusi yang mendekati penyelesaian analitisnya. Metode numerik memang menghasilkan solusi yang memiliki derajat kesalahan atau *error* tertentu, namun metode ini dapat memberikan gambaran penyelesaian dari suatu sistem persamaan diferensial. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah metode Runge-Kutta orde tiga.

Metode Runge-Kutta merupakan salah satu bentuk metode yang telah banyak digunakan oleh para peneliti sebelumnya untuk memperoleh solusi dari suatu model matematika berupa suatu sistem persamaan diferensial non-linier, seperti penelitian yang dilakukan oleh Side, Utami, Sukarna, dan Pratama (2018); Ludji dan Buan (2023); Loklomin dan Rumlawang (2014); Wijayanti, Setyaningsih, dan Wati (2011). Metode Runge-Kutta yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Runge-Kutta orde tiga karena cukup akurat dan memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode Runge-Kutta orde satu dan dua (Iserles, 2009). Selain itu, solusi yang diperoleh akan dibandingkan dengan solusi yang diperoleh menggunakan metode lanjutan yaitu metode Adams-Bashforth orde tiga (Atkinson, Han, & Stewart, 2009). Perbandingan kedua metode tersebut sebelumnya telah digunakan dalam penelitian yang dilakukan oleh Setiawan & Mungkasi (2021) sehingga mereka dapat memperoleh hasil yang konsisten. Perbandingan tersebut dilakukan untuk menunjukkan dan memberikan keyakinan kepada peneliti terkait kebenaran dari solusi numerik yang telah diperoleh. Oleh karena itu dalam penelitian ini, peneliti menggunakan metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga untuk menyelesaikan model epidemiologi SIR dengan vaksinasi konstan.

KAJIAN PUSTAKA

Dalam bagian ini, peneliti menjelaskan teori yang berkaitan dengan konsep atau rumus dari metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga.

Metode Runge-Kutta Orde Tiga

Metode Runge-Kutta merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan diferensial non-linier. Metode ini lebih mudah digunakan dibandingkan dengan metode lain yang menggunakan konsep turunan. Meskipun hasil dari metode Runge-Kutta merupakan sebuah pendekatan dari hasil yang sebenarnya, metode ini memiliki memiliki tingkat akurasi yang cukup baik bergantung pada tingkat ordenya. Pada penelitian ini, peneliti menggunakan metode Runge-Kutta orde tiga sehingga memiliki tingkat akurasi yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode Runge-Kutta pada orde satu dan dua. Persamaan umum dari metode Runge-Kutta orde tiga untuk masalah nilai awal $y'(t) = f(t, y(t))$ adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + (s_1 k_1 + s_2 k_2 + s_3 k_3)h \tag{8}$$

dimana

$$k_1 = f(t_n, y_n) \tag{9}$$
$$k_2 = f(t_n + a_2 h, y_n + b_{21} h k_1) \tag{10}$$
$$k_3 = f(t_n + a_3 h, y_n + b_{31} h k_1 + b_{32} h k_2) \tag{11}$$

dengan melakukan ekspansi menggunakan deret Taylor diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1 \tag{12}$$
$$a_2 s_2 + a_3 s_3 = \frac{1}{2} \tag{13}$$
$$a_2^2 s_2 + a_3^2 s_3 = \frac{1}{3} \tag{14}$$
$$a_2 b_{32} s_3 = \frac{1}{6} \tag{15}$$
$$a_2 = b_{21} \tag{16}$$
$$a_3 = b_{31} + b_{32} \tag{17}$$

sehingga diperoleh penyelesaian dari persamaan (12)-(17) sebagai berikut:

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1$$
$$a_3^2 = \frac{3}{2}, a_2^2 = -\frac{7}{4} \quad (18)$$

$$b_{31} = -1, b_{32} = 2$$
$$s_1 = \frac{1}{6}, s_2 = \frac{2}{3}, s_3 = \frac{1}{6}$$

Dengan mensubstitusikan nilai dari (18) ke dalam persamaan (8)-(11) diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (19)$$

dimana

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (20)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \quad (21)$$
$$k_3 = f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \quad (22)$$

dengan $h = t_{n+1} - t_n$. Referensi untuk metode ini adalah Iserles (2009).

Metode Adams-Bashforth Orde Tiga

Bentuk umum dari persamaan differensial orde satu adalah sebagai berikut:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (23)$$

Jika persamaan (23) diintegralkan pada interval $[t_n, t_{n+1}]$ diperoleh

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \quad (24)$$
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\big(t, y(t)\big)dt \quad (25)$$

Apabila $f(t, y(t))$ merupakan suatu fungsi yang rumit sehingga sulit untuk menentukan hasil integralnya, maka fungsi tersebut dapat digantikan dengan fungsi polinomial interpolasi $g(t)$ sehingga persamaan (25) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t)dt \quad (26)$$

Interpolasi selisih mundur Newton berderajat dua dipilih untuk mendapatkan bentuk persamaan dalam metode Adams-Bashforth orde tiga. Rumus interpolasi selisih mundur Newton berderajat dua adalah sebagai berikut:

$$p_2(t) = g(t_n)l_0(t) + g(t_{n-1})l_1(t) + g(t_{n-2})l_2(t) \quad (27)$$

dengan

$$l_0(t) = \frac{(t - t_{n-1})(t - t_{n-2})}{2h^2} \quad (28)$$

$$l_1(t) = \frac{-(t-t_n)(t-t_{n-2})}{h^2} \quad (29)$$

$$l_2(t) = \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{2h^2} \quad (30)$$

Dari persamaan (27), maka kita dapat memperoleh

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_2(t)\, dt = \frac{1}{12} h(23g(t_n) - 16g(t_{n-1}) + 5g(t_{n-2}) \quad (31)$$

Saat persamaan (31) disubsitusikan ke persamaan (26) dengan $\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t)dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_2(t)dt$, maka diperoleh persamaan metode Adams-Bashforth orde tiga sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{12} h(23{y'}_n - 16{y'}_{n-1} + 5{y'}_{n-2}) \quad (32)$$

dimana ${y'}_k \equiv f(t_k, y_k)$ dengan $k \geq 0$ dan $n \geq 2$. Referensi untuk metode ini adalah Atkinson, Han, dan Stewart (2009).

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kajian numeris dari penyelesaian suatu model epidemiologi SIR dengan vaksinasi konstan. Penyelesaian tersebut diperoleh peneliti dengan menerapkan metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga dengan bantuan software MATLAB. Persamaan dalam metode Runge-Kutta yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} h(k_{1x} + 4k_{2x} + k_{3x}) \quad (33)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h(k_{1y} + 4k_{2y} + k_{3y}) \quad (34)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6} h(k_{1z} + 4k_{2z} + k_{3z}) \quad (35)$$

dimana

$$k_{1x} = (1-p)\alpha - \beta x_n y_n - \alpha x_n \quad (36)$$

$$k_{1y} = \beta x_n y_n - (\gamma + \alpha) y_n \quad (37)$$

$$k_{1z} = p\alpha + \gamma y_n - \alpha z_n \quad (38)$$

$$k_{2x} = (1-p)\alpha - \beta(x_n + \frac{1}{2} hk_{1x})(y_n + \frac{1}{2} hk_{1y}) - \alpha(x_n + \frac{1}{2} hk_{1x}) \quad (39)$$

$$k_{2y} = \beta(x_n + \frac{1}{2} hk_{1x})(y_n + \frac{1}{2} hk_{1y}) - (\gamma + \alpha)(y_n + \frac{1}{2} hk_{1y}) \quad (40)$$

$$k_{2z} = p\alpha + \gamma(y_n + \frac{1}{2} hk_{1y}) - \alpha(z_n + \frac{1}{2} hk_{1z}) \quad (41)$$

$$k_{3x} = (1-p)\alpha - \beta(x_n - hk_{1x} + 2hk_{2x})(y_n - hk_{1y} + 2hk_{2y}) - \alpha(x_n - hk_{1x} + 2hk_{2x}) \quad (42)$$

$$k_{3y} = \beta(x_n - hk_{1x} + 2hk_{2x})(y_n - hk_{1y} + 2hk_{2y}) - (\gamma+\alpha)(y_n - hk_{1y} + 2hk \quad (43)$$

$$k_{3z} = p\alpha + \gamma(y_n - hk_{1y} + 2hk_{2y}) - \alpha(z_n - hk_{1z} + 2hk_{2z}) \quad (44)$$

Hasil yang diperoleh dari persamaan (33)-(35) pada iterasi pertama dan kedua beserta nilai awal akan digunakan untuk mencari solusi model menggunakan metode Adams-Bashforth dengan persamaan sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}\big(23\big((1-p)\alpha - \beta x_n y_n - \alpha x_n\big) - 16\big((1-p)\alpha - \beta x_{n-1}y_{n-1} - \alpha x_{n-1}\big) + 5\big((1-p)\alpha - \beta x_{n-2}y_{n-2} - \alpha x_{n-2}\big)\big) \quad (45)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23(\beta x_n y_n - (\gamma+\alpha)y_n) - 16(\beta x_{n-1}y_{n-1} - (\gamma+\alpha)y_{n-1}) + 5(\beta x_{n-2}y_{n-2} - (\gamma+\alpha)y_{n-2})) \quad (46)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{12}(23(p\alpha + \gamma y_n - \alpha z_n) - 16(p\alpha + \gamma y_{n-1} - \alpha z_{n-1}) + 5(p\alpha + \gamma y_{n-2} - \alpha z_{n-2})) \quad (47)$$

Dari persamaan (45)-(47) misalnya disubstitusikan untuk $n = 2$ maka menjadi sebagai berikut:

$$x_3 = x_2 + \frac{h}{12}\big(23\big((1-p)\alpha - \beta x_2 y_2 - \alpha x_2\big) - 16\big((1-p)\alpha - \beta x_1 y_1 - \alpha x_1\big) + 5\big((1-p)\alpha - \beta x_0 y_0 - \alpha x_0\big)\big) \quad (48)$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12}(23(\beta x_2 y_2 - (\gamma+\alpha)y_2) - 16(\beta x_1 y_1 - (\gamma+\alpha)y_1) + 5(\beta x_0 y_0 - (\gamma+\alpha)y_0)) \quad (49)$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{12}(23(p\alpha + \gamma y_2 - \alpha z_2) - 16(p\alpha + \gamma y_1 - \alpha z_1) + 5(p\alpha + \gamma y_0 - \alpha z_0)) \quad (50)$$

Nilai parameter dan nilai awal yang digunakan ditunjukkan pada Tabel 1 sesuai dengan hasil penelitian Makinde (2007).

TABEL 1. Nilai Parameter dan Nilai Awal

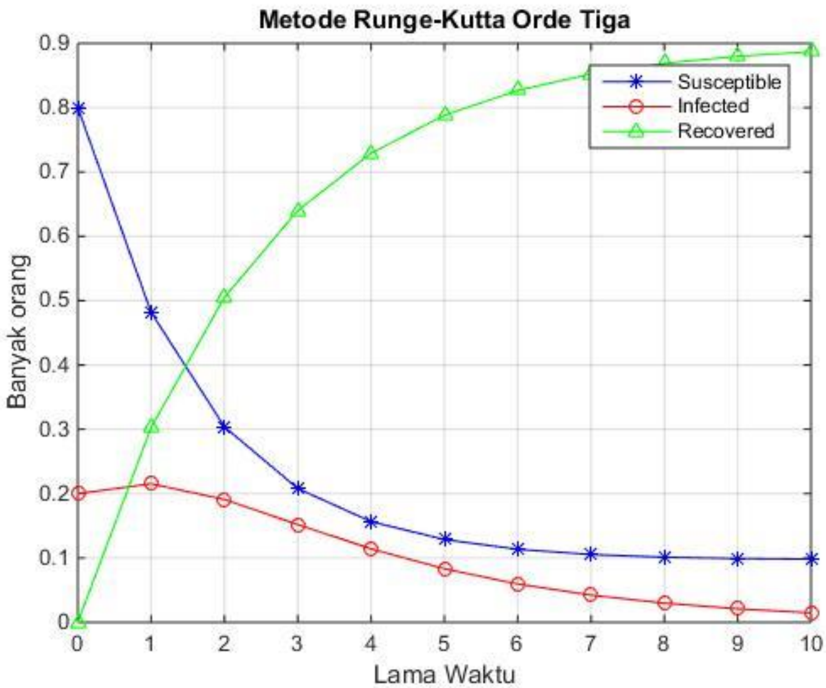
Notasi	Nilai
α	0,4
β	0,8
γ	0,03
p	0,9
h	1
x_0	0,8
y_0	0,2
z_0	0

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bagian ini, peneliti menyajikan hasil solusi numerik dari model epidemiologi SIR menggunakan metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga dengan bantuan MATLAB. Hasil tersebut kemudian dianalisis dan dibandingkan untuk menentukan metode yang dapat memberikan solusi yang lebih akurat.

Solusi Numerik Metode Runge-Kutta Orde Tiga

Solusi yang diberikan MATLAB pada iterasi pertama hingga iterasi kesepuluh ditunjukkan pada Gambar 2.

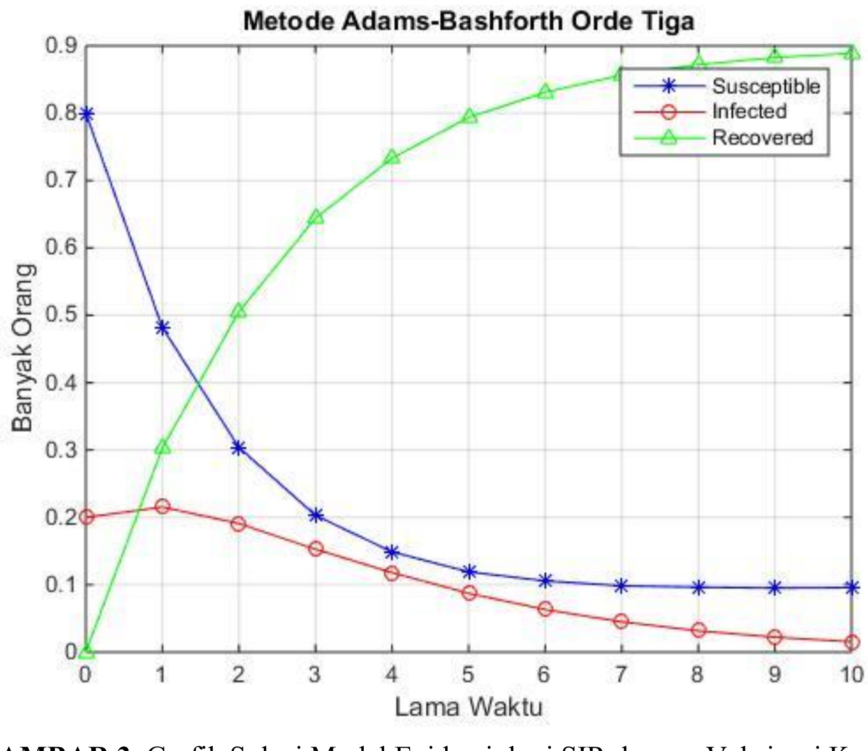


GAMBAR 2. Grafik Solusi Model Epidemiologi SIR dengan Vaksinasi Konstan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Tiga

Berdasarkan Gambar 2, dapat dilihat bahwa jumlah orang yang rentan terkena penyakit (*susceptible*) dan jumlah orang yang terinfeksi penyakit (*infected*) akan semakin berkurang, sedangkan jumlah orang yang pulih dari penyakit (*recovered*) akan semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu. Mula-mula, proporsi yang rentan terkena penyakit adalah 0,8 dari total populasi. Kemudian pada iterasi pertama, proporsi tersebut berkurang menjadi 0,48 dari total populasi. Proporsi tersebut terus berkurang hingga pada iterasi kesepuluh menjadi 0,098 dari total populasi. Jika iterasi tersebut dilanjutkan, maka akan terlihat bahwa hasil iterasi akan mendekati nol. Penambahan iterasi menujukkan penambahan lama waktu sehingga terlihat bahwa seiring dengan berjalannya waktu, maka proporsi orang yang rentan terkena penyakit akan semakin berkurang hingga tidak ada lagi orang yang rentan terkena penyakit (hasil iterasi mendekati 0). Pengurangan atau penurunan tersebut juga terjadi pada proporsi orang yang terinfeksi penyakit. Awalnya, proporsi orang yang terifeksi penyakit adalah 0,2 dari total populasi. Pada iterasi pertama, proporsi tersebut bertambah sedikit menjadi 0,215 dari total populasi, namun pada iterasi selanjutnya proporsi tersebut terus berkurang hingga pada iterasi kesepuluh proporsi menjadi 0,015 dari total populasi. Jika iterasi tersebut dilanjutkan, maka terlihat bahwa hasil iterasinya akan mendekati nol. Hal tersebut menunjukkan bahwa seiring dengan berjalannya waktu, proporsi orang yang terinfeksi sempat mengalami peningkatan tetapi dalam jangka panjang akan terus berkurang hingga tidak ada lagi orang yang terinfeksi penyakit (hasil iterasi mendekati 0). Sebaliknya, proporsi orang yang pulih dari penyakit akan terus bertambah seiring dengan berjalannya waktu atau pada penambahan iterasi. Awalnya, proporsi orang yang pulih dari penyakit belum ada, namun pada iterasi pertama proporsi meningkat menjadi 0,3 dari total populasi. Kemudian, proporsi tersebut terus meningkat pada iterasi selanjutnya hingga pada iterasi kesepuluh menjadi 0,89 dari total populasi. Jika iterasi tersebut dilanjutkan, maka akan terlihat bahwa hasilnya iterasi akan mendekati satu. Hal tersebut menunjukkan bahwa seiring dengan berjalannya waktu, maka jumlah orang yang pulih dari penyakit akan semakin banyak hingga semua orang pulih dari penyakit (hasil iterasi mendekati 1).

Solusi Numerik Metode Adams-Bashforth Orde Tiga

Solusi metode Adams-Bashforth orde tiga yang diberikan MATLAB pada iterasi pertama hingga iterasi kesepuluh ditunjukkan pada Gambar 3.

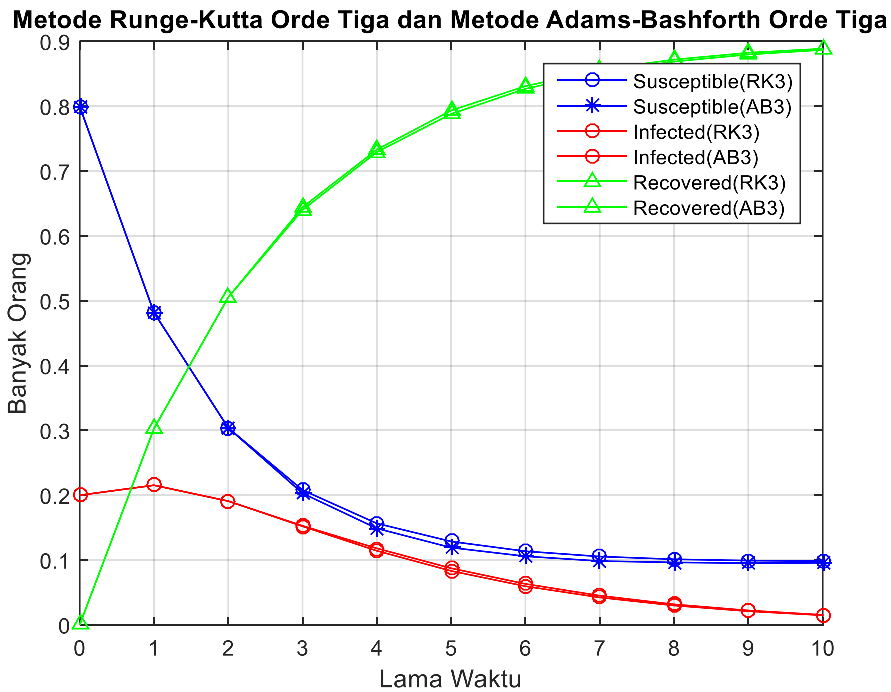


GAMBAR 3. Grafik Solusi Model Epidemiologi SIR dengan Vaksinasi Konstan Menggunakan Metode Adams-Bashforth Orde Tiga

Berdasarkan Gambar 3, senada dengan hasil pada Gambar 2 sebelumnya, dapat terlihat bahwa proporsi orang yang rentan (*susceptible)* dan proporsi orang terinfeksi penyakit (*infected)* akan semakin berkurang, sedangkan proporsi orang yang pulih dari penyakit (*recovered)* semakin meningkat seiring dengan bertambahnya waktu (dalam jangka panjajng). Proporsi orang pada masing-masing kelompok (*susceptile, infected, recovered)* pada kondisi awal, iterasi pertama, dan iterasi kedua yang digunakan dalam metode Adams-Bashforth orde tiga sama dengan nilai atau hasil pada metode Runge-Kutta orde tiga sehingga perbedaan grafik di atas dengan grafik sebelumnya terlihat mulai dari hasil pada iterasi ketiga. Pada iterasi ketiga, proporsi orang yang rentan berkurang dari semula menjadi 0,2 dari total populasi dan proporsi terus berkurang hingga pada iterasi kesepuluh proporsi menjadi 0,096 dari total populasi. Sementara itu pada iterasi ketiga, proporsi orang yang terinfeksi penyakit berkurang dari semula sehingga menjadi 0,15 dari total populasi dan proporsi terus semakin berkurang hingga pada iterasi kesepuluh proporsi menjadi 0,015 dari total populasi. Sebaliknya pada iterasi ketiga, proporsi orang yang pulih dari penyakit proporsi meningkat dari semula sehingga menjadi 0,64 dari total populasi dan proporsi tersebut terus meningkat hingga pada iterasi kesepuluh proporsi menjadi 0,89 dari total populasi. Hasil tersebut menunjukkan apabila iterasi terus dilanjutkan, maka hasil iterasi pada orang yang rentan dan orang yang terinfeksi akan mendekati nol, sedangkan hasil iterasi pada orang yang pulih dari penyakit akan mendekati satu. Pertambahan iterasi menunjukkan bertambahnya lama waktu sehingga dapat disimpulkan bahawa proporsi orang yang rentan dan proporsi orang yang terinfeksi seiring dengan bertambahnya waktu akan menjadi tidak ada (hasil iterasi mendekati 0) dan mereka semua menjadi pulih dari penyakit (hasil iterasi mendekati 1).

Perbandingan Metode Runge-Kutta Orde Tiga dengan Metode Adams-Bashforth Orde Tiga

Perilaku solusi yang dihasilkan pada metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga memiliki kemiripan. Hal tersebut dengan lebih jelas terlihat pada Gambar 4.



GAMBAR 4. Perbandingan Solusi Metode Runge-Kutta Orde Tiga (RK3) dan Metode Adams-Bashforth Orde Tiga (AB3)

Perbandingan hasil solusi numerik yang diperoleh melalui metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga dilakukan agar dapat diketahui metode mana yang dapat menghasilkan solusi yang lebih akurat. Acuan yang digunakan untuk mengukur besar galat atau *error* dari solusi numerik yang dihasilkan pada setiap metode adalah penyelesaian yang diperoleh melalui ODE45 pada *software* MATLAB dengan toleransi relatif yaitu 10^{-12} dan toleransi mutlak yaitu 10^{-12}. Galat mutlak dari kedua metode, jika menggunakan langkah waktu $h = 1,\ h = 0{,}5,\ h = 0{,}25,$ dan $h = 0{,}125$, seperti pada Tabel 2.

TABEL 2. Rata-Rata Selisih Galat Mutlak pada Metode Runge-Kutta Orde Tiga dan Metode Adams-Bashforth Orde Tiga

h	$E(S)^{RK3}$	$E(S)^{AB3}$	$E(I)^{RK3}$	$E(I)^{AB3}$	$E(R)^{RK3}$	$E(R)^{AB3}$
1	$8{,}6 \times 10^{-4}$	$5{,}3 \times 10^{-3}$	$2{,}1 \times 10^{-4}$	$1{,}9 \times 10^{-3}$	$6{,}7 \times 10^{-4}$	$3{,}4 \times 10^{-3}$
0,5	$1{,}2 \times 10^{-4}$	$6{,}1 \times 10^{-4}$	$4{,}2 \times 10^{-5}$	$2{,}1 \times 10^{-4}$	$7{,}7 \times 10^{-5}$	$4{,}9 \times 10^{-4}$
0,25	$1{,}5{,}\times 10^{-5}$	$6{,}9 \times 10^{-5}$	6×10^{-6}	$2{,}8 \times 10^{-5}$	9×10^{-6}	$6{,}7 \times 10^{-5}$
0,125	$1{,}9 \times 10^{-6}$	$8{,}2 \times 10^{-6}$	7×10^{-7}	4×10^{-6}	$1{,}1 \times 10^{-6}$	$8{,}7 \times 10^{-6}$

Catatan untuk Tabel 2 adalah sebagai berikut. $RK3$ adalah Metode Runge-Kutta Orde Tiga. $AB3$ adalah Metode Adams-Bashforth Orde Tiga. h adalah langkah waktu. $E(S)^{RK3}$ artinya error mutlak kelompok *susceptible* pada hasil metode $RK3$.

Berdasarkan tabel di atas, terlihat bahwa solusi dari metode Runge-Kutta orde tiga memiliki rata-rata selisih galat mutlak yang lebih kecil dibandingkan dengan solusi dari metode Adams-Bashforth orde tiga pada langkah waktu $h = 1, h = 0{,}5, h = 0{,}25,$ dan $h = 0{,}125$, baik pada populasi *susceptible* (S), *infected* (I), dan *recovered* (R). Selain itu, semakin kecil nilai langkah waktu h yang digunakan dalam menghitung solusi pada $t = 1$ dan $t = 10$, maka rata-rata selisih galat mutlak yang dihasilkan akan semakin kecil juga. Hal tersebut menunjukkan bahwa metode akan menghasilkan solusi yang lebih akurat jika menggunakan langkah waktu h yang cukup kecil.

KESIMPULAN

Solusi numerik yang dihasilkan dari metode Runge-Kutta orde tiga dan metode Adams-Bashforth orde tiga menunjukkan perilaku yang sama atau konsisten pada rentang skala waktu $t = 1$ dan $t = 10$ sehingga peneliti meyakini kebenaran dari solusi numerik yang diperoleh. Solusi numeriknya adalah proporsi populasi penduduk yang rentan (*susceptible*) akan terus berkurang, sedangkan proporsi populasi penduduk yang terinfeksi penyakit (*infected*) akan mengalami kenaikan pada jangka waktu yang pendek dan kemudian proporsi populasi tersebut akan terus berkurang. Di samping itu, proporsi populasi penduduk yang sembuh atau terbebas dari penyakit (*recovered*) seiring berjalannya waktu akan terus bertambah. Hal ini menunjukkan bahwa strategi vaksinasi berhasil menyelesaikan masalah penyebaran penyakit menular dalam masyarakat.

DAFTAR PUSTAKA

Atkinson, K., Han, W., & Stewart, D. (2009). *Numerikal Solution of Ordinary Differential Equations.* Hoboken: Wiley-Interscience.

Iserles, A. (2009). *A First Course in The Numerical Analysis of Differential Equations.* New York: Cambridge University Press.

Loklomin, S. B. & Rumlawang, F. Y. (2014). Aplikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat pada Penyelesaian Rangkaian Listrik RLC. *Jurnal Barekeng, 8(1).* 39-43.

Ludji, D. G. & Buan, F. C. H. (2023). Penerapan Metode Runge-Kutta Orde 4 pada Pemodelan Penularan Penyakit Cacar Monyet. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, 6(1).* 1-9.

Ma, Z., & Li, J. (2009). *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics.* Singapore: World Scientific.

Makinde, O. (2007). Adomian Decomposition Approach To A SIR Epidemic Model With Constant Vaccination Strategy. *Applied Mathematics and Computation, 184*. 842-948.

Setiawan, L. I., & Mungkasi, S. (2021). Penyelesaian Model Epidemi SIR Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat dan Metode Adams-Bashforth-Moulton. *Jurnal Ilmial Ilmu Komputer dan Matematika, 18(2).* 55-61.

Side, S., Utami, A. M., Sukarna, & Pratama, M. I. (2018). Numerical Solution of SIR Model for Transmission of Tuberculosis by Runge-Kutta Method. *Journal of Physics: Conference Series, 1040 012021*.

Widowati, & Sutimin. (2007). *Buku Ajar Pemodelan Matematika.* Semarang: Universitas Diponegoro.

Wijayanti, H., Setyaningsih, S., & Wati, M. (2011). Metode Runge Kutta dalam Penyelesaian Model Radang Akut. *Ekologia, 11(2).* 46-52.