Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 151 – 162)
Vol. 5. No. 2, Oktober 2022
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Solusi Persamaan Difusi Adveksi Dengan Metode Pemisahan Variabel

Hisyam Ihsan[1,a)] dan Ilmi Nurfaizah Rustam[1,b)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar*

[a)] hisyamihsan@gmail.com
[b)]ilminurfaizah@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini merupakan penelitian murni berupa kajian teori tentang solusi persamaan difusi adveksi dengan metode pemisahan variabel. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penurunan persamaan difusi adveksi, menemukan solusi persamaan difusi adveksi dengan menggunakan metode pemisahan variabel dan melakukan simulasi Solusi Persamaan dengan menggunakan software Matlab. Persamaan Difusi Adveksi diperoleh dari penurunan dengan Hukum Fick. Solusi persamaan difusi adveksi dengan menerapkan metode pemisahan variabel, menentukan syarat batas, memisahkan variabel, mendapatkan solusi umum, dan mendapatkan solusi khusus. Dimana solusi khusus tersebut akan disimulasikan.*
Kata Kunci : *Persamaan Difusi Adveksi, Metode Pemisahan Variabel*

Abstract. *This research is pure research in the form of a theoretical study of the solution of advection-diffusion using separation of variable method. The purpose of this study was to determine the derivation of the advection-diffusion equation, find a solution to the advection-diffusion equation using the separation of variable method and perform simulations. Solutions of the equation using Matlab Software. The Advection Diffusion Equation is obtained from the derivation by Fick's Law. The solution of the advection-diffusion equation is by applying the separation of variable method, determining boundary conditions, separating variables, obtaining general solutions, and obtaining special solutions. Where the specific solution will be simulated.*
Keywords : *Advection-Diffusion Equation, Separation of Variable Method.*

LATAR BELAKANG

Persamaan difusi merupakan persamaan diferensial parsial yang merepresentasikan berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah (Oktavia, 2018). Ditemukan bahwa masing-masing partikel difusi bergerak secara acak di bidang difusi. Persamaan difusi dapat digunakan untuk menggambarkan penyebaran perpindahan massa seperti penyebaran konsentrasi oksigen di suatu jaringan tubuh, polusi lingkungan, dan cairan kimia.

Persamaan difusi dapat dibentuk dengan menggunakan Hukum Fick tentang difusi yang menyatakan bahwa fluks massa dari suatu bahan terlarut per satuan luas berbanding lurus dengan gradien konsentrasi(Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., 1992). Untuk proses difusi satu dimensi, hukum fick dapat dinyatakan dalam rumus matematika sebagai berikut.

$$J = -D\frac{\partial c}{\partial x} \tag{1}$$

Laju perubahan kosentrasi dalam penampang harus sama dengan molekul bahan terlarut yang masuk dan keluar. Misalkan fluks massa adalah $J(x,t)$, sehingga memberikan persamaan kontinuitas massa sebagai berikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial c}{\partial x}\right)$$

Maka diperoleh bentuk umum persamaan difusi sebagai berikut :

$$\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{2}$$

Persamaan adveksi merupakan proses transportasi berupa aliran rata-rata atau arus, seperti sungai atau gerakan pasang surut yang digerakkan oleh gaya gravitasi atau tekanan dan berupa gerak horizontal. Persamaan adveksi linier pada bidang kecepatan acak, persamaan adveksi muncul dalam pemodelan berbagai fenomena yang melibatkan transportasi zat secara progresif atau gerakan gelombang (Noviani & Fran, 2020).

Fluks partikel melalui luas A dalam selang waktu Δt jika fluida mengalirkan u (velositas). Jumlah atau banyaknya molekul di dalam penampang diartikan sebagai banyaknya konsetrasi c dari molekul pada jarak yang ditempuh oleh molekul tersebut, yaitu:

$$J = \frac{cAu\Delta t}{A\Delta t} = cu$$

J ini disebut fluks adveksi. Dengan argument yang sama seperti sebelumnya, maka laju perubahan konsentrasi dalam penampang dengan panjang l dan luas A, adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{J - J'}{l}$$

$$= cu - \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)c\right]$$

$$= cu - \left[\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)u + cu\right]$$

$$= cu - \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)u - cu$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -u\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) \tag{3}$$

Dalam pembahasan difusi dalam cairan yang mengalir ini diasumikan bahwa proses difusi dan adveksi adalah proses yang terpisah dan dapat digabungkan. Hal ini berarti ada anggapan bahwa proses difusi dalam cairan yang mengalir sama dengan proses difusi dalam cairan diam. Jika difusi dan adveksi sama perannya, maka perubahan konsentrasi total dalam penampang tersebut merupakan Persamaan kontinuitas, menjadi:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{4}$$

Persamaan difusi adveksi merupakan model matematika yang menggambarkan proses transportasi suatu zat yang dipengaruhi gaya gravitasi dan penyebaran sekaligus. Persamaan ini digunakan untuk memprediksi pergerakan polutan didalam air (Paskalia, 2018). Persamaan ini merupakan persamaan diferensial parsial yang tergantung pada variabel ruang dan variable waktu. Persamaan difusi adveksi dapat ditemukan dalam kehidupan sehari-hari seperti pencemaran sungai maupun kebakaran hutan. Konsentrasi polutan di dalam air maupun udara pada posisi x dan pada saat t dapat diketahui melalui solusi dari model persamaan difusi-adveksi yang dinotasikan dengan $u(x,t)$ (Josua, Evi Noviani, 2020).

Penelitian tentang Persamaan Difusi Adveksi telah dilakukan oleh beberapa peneliti seperti, Penelitian Lailatul Azizah (2019) berfokus pada menyelesaikan persamaan difusi dengan metode numerik. Penelitian Dodi Jesaya Sinaga dkk (2020) berfokus pada menyelesaikan persamaan difusi dengan metode transformasi laplace. Penelitian yang dilakukan oleh Josua dkk (2020) berfokus pada menyelesaikan persamaan Difusi Adveksi dengan metode transformasi fourier. Sedangkan penelitian Monica Paskalia (2018), berfokus pada menyelesaikan persamaan adveksi-difusi menggunakan metode beda hingga. Sedangkan perbedaannya terletak pada metode yang akan digunakan penelitian ini, yaitu metode pemisahan variabel. Oleh karena itu artikel ini akan membahas tentang analisis penyelesaiaan persamaan Difusi Adveksi dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

HASIL DAN SIMULASI

Solusi Persamaan Difusi Adveksi dengan Metode Pemisahan Variabel

Langkah-langkah penyelesaian Persamaan Difusi Adveksi dengan Metode Pemisahan Variabel, sebagai berikut :

1. Mendefinisikan turunan-turunan parsial persamaan difusi adveksi hingga mendapatkan persamaan diferensial biasa.

   Karena $c(x,t) = X(x) \times T(t)$, maka dapat didefinisikan turunan-turunan parsial c sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = X(x) \times \frac{d}{dt}T \tag{5}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{d}{dx}X \times T(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \left(\frac{d^2}{dx^2}X \times T(t)\right) + \left(\frac{d}{dx}X \times 0\right) = \frac{d^2}{dx^2}X \times T(t) \tag{7}$$

   Substitusi Persamaan (5),(6), dan (7) ke Persamaan (4), sehingga diperoleh:

$$X(x) \times \frac{d}{dt}T + u\left(\frac{d}{dx}X \times T(t)\right) = D\left(\frac{d^2}{dx^2}X \times T(t)\right) \tag{8}$$

   Persamaan (8) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$X(x)T'(t) + uX'(x)T(t) = DX''(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = DX''(x)T(t) - uX'(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = T(t)(DX''(x) - uX'(x))$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{DX''(x) - uX'(x)}{X(x)} \tag{9}$$

   Ruas kiri memuat yang hanya tergantung pada t dan ruas kanan memuat fungsi yang hanya tergantung pada x. Artinya nilai dari ruas kiri dan ruas kanan memiliki nilai yang sama, misalkan sama dengan konstanta, misalkan konstanta tersebut adalah λ, atau dapat dituliskan

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{DX''(x) - uX'(x)}{X(x)} = \lambda \tag{10}$$

   Akibatnya λ disebut sebagai konstanta pemisah sehingga Persamaan (8) menghasilkan dua persamaan diferensial biasa yaitu :

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \rightarrow T'(t) = \lambda T(t) \rightarrow T'(t) - \lambda T(t) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{DX''(x) - uX'(x)}{X(x)} = \lambda \rightarrow DX''(x) - uX'(x) = \lambda X(x)$$

$$\rightarrow DX''(x) - uX'(x) - \lambda X(x) = 0 \qquad (12)$$

2. Menentukan penyelesaian $X(x)$ dan $T(t)$ dari kedua persamaan diferensial biasa yang telah di dapat dari Langkah sebelumnya.

Penyelesaian Persamaan (12) yang hanya tergantung pada x diasumsikan $X(x)$ harus memenuhi batas homogen.

Seperti yang telah dipaparkan di awal nilai batasnya $c(0,t) = c(L,t) = 0,\ t > 0$. Maka dari persamaan $c(x,t) = X(x) \times T(t)$ diperoleh

$$c(0,t) = X(0)T(t) = 0$$
$$c(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

Jika $T(t) = 0$ maka $c(x,t)$ merupakan penyelesaian trivial yaitu $c = 0$. Agar memenuhi kondisi batas $X(0) = 0$ dan $X(L) = 0$ haruslah mendapatkan penyelesaian nontrivial. Dimana solusi nontrivial didapat jika $T(t) \neq 0$.

Untuk memperoleh penyelesaian non trivial Persamaan (12) yang merupakan persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstanta maka kita misalkan $X(x) = e^{rx}$.

Perhatikan bahwa:

$$DX''(x) - uX'(x) - \lambda X(x) = 0$$
$$DX''(e^{rx}) - uX'(e^{rx}) - \lambda X(e^{rx}) = 0$$
$$DX''(r^2e^{rx}) - uX'(re^{rx}) - \lambda X(e^{rx}) = 0$$
$$e^{rx}(Dr^2 - ur - \lambda) = 0$$

Karena $e^{rx} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ maka $Dr^2 - ur - \lambda = 0$ disebut persamaan karakteristik. Dengan menggunakan rumus ABC, diperoleh akar persamaan karakteristiknya adalah :

$$r_1 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4D(-\lambda)}}{2D} = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4D\lambda}}{2D}$$
$$r_2 = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4D(-\lambda)}}{2D} = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4D\lambda}}{2D}$$

Kemungkinan nilai r_1 dan r_1 bergantung pada nilai diskiminan, yaitu:

i. Bila $u^2 + 4D\lambda > 0$ maka $r_1 \neq r_2$(akar real dan berbeda)
ii. Bila $u^2 + 4D\lambda = 0$ maka $r_1 = r_2$(akar real dan sama)
iii. Bila $u^2 + 4D\lambda < 0$ maka r_1, r_2 merupakan bilangan imajiner

Kemungkinan (i). Misalkan akar karakteristik dari persamaan (12) merupakan akar real dan berbeda $(r_1 \neq r_2)$. Maka $X_1(x) = e^{r_1 x}$ dan $X_2(x) = e^{r_2 x}$ merupakan solusi bebas linear persamaan diferensial homogen tersebut. Dengan demikian, solusi umumnya dapat dituliskan pada Persamaan (13) sebagai berikut:

$$X(x) = P_1X_1(x) + P_2X_2(x)$$
$$X(x) = P_1e^{r_1 x} + P_2e^{r_2 x} \qquad (13)$$

Sedangkan solusi khususnya ditentukan dengan mencari nilai dari P_1 dan P_2 yang disubstitusikan pada syarat batasnya $(X(0) = 0$ dan $X(L) = 0)$ yaitu:
Syarat batas pertama :

$$X(0) = 0$$
$$P_1e^{r_1 0} + P_2e^{r_2 0} = 0$$
$$P_1e^0 + P_2e^0 = 0$$
$$P_1 + P_2 = 0$$
$$P_1 = -P_2$$

Syarat batas kedua:

$$X(L) = 0$$
$$P_1 e^{r_1 L} + P_2 e^{r_2 L} = 0$$
$$-P_1 e^{r_1 L} + P_2 e^{r_2 L} = 0$$
$$-P_2 (e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) = 0$$

Karena $e^{r_1 L} - e^{r_2 L} \neq 0$ maka diperoleh $P_2 = 0$ dan $P_1 = -0 = 0$, akibatnya :

$$X(x) = 0e^{r_1 x} + 0e^{r_2 x} = 0$$

Sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk $u^2 + 4D\lambda > 0$.

Kemungkinan (ii). Misalkan akar karakteristikdari Persamaan (12) merupakan akar real dan sama ($r_1 = r_2 = r$). Maka $u^2 + 4D\lambda = 0$, sehingga

$$r_1 = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4D\lambda}}{2D} = \frac{u}{2D}$$
$$r_2 = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4D\lambda}}{2D} = \frac{u}{2D}$$

Dengan demikian, salah satu solusi dari Persamaan (12) yaitu $X_1(x) = e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}$. Untuk mencari solusi kedua dari Persamaan (12), maka misalkan $X_2(x) = w(x)e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}$. Fungsi $w(x)$ dapat dicari dengan mensubstitusikan solusi kedua beserta turunannya ke Persamaan (12).

Perhatikan langkah berikut:

$$X_2(x) = w(x)e^{\frac{u}{2D}x} \tag{14}$$

$$X'_2(x) = w'(x)e^{\frac{u}{2D}x} + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} = e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\left(w'(x) + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)\right) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} X''_2(x) &= \left(w''(x)e^{\frac{u}{2D}x} + w'(x)\left(\frac{u}{2D}\right)e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\right) + \left(w'(x)\left(\frac{u}{2D}\right)e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\right) + \left(w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)^2 e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\right) \\ &= w''(x)e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} + 2w'(x)\left(\left(\frac{u}{2D}\right)e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\right) + w(x)\left(\left(\frac{u}{2D}\right)^2 e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\right) \\ &= e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\left(w''(x) + 2w'(x)\left(\frac{u}{2D}\right) + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Substitusi Persamaan (14), (15), dan (16) ke Persamaan (12)

$$D\left[e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\left(w''(x) + 2w'(x)\left(\frac{u}{2D}\right) + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)^2\right)\right] - u\left[e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\left(w'(x) + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)\right)\right] - \lambda\left[w(x)e^{\frac{u}{2D}x}\right] = 0$$

$$D\left[w''(x) + 2w'(x)\left(\frac{u}{2D}\right) + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)^2\right] - u\left[w'(x) + w(x)\left(\frac{u}{2D}\right)\right] - \lambda[w(x)] = 0$$

$$Dw''(x) + w'(x)u + w(x)\left(\frac{u^2}{4D}\right) - uw'(x) - w(x)\left(\frac{u^2}{2D}\right) - \lambda w(x) = 0$$

$$Dw''(x) + w(x)\left(\frac{u^2}{4D}\right) - w(x)\left(\frac{u^2}{2D}\right) - \lambda w(x) = 0$$

Karena $u^2 + 4D\lambda = 0 \rightarrow u^2 = -4D\lambda$ maka

$$Dw''(x) + w(x)\left(\frac{-4D\lambda}{4D}\right) - w(x)\left(\frac{-4D\lambda}{2D}\right) - \lambda w(x) = 0$$

$Dw''(x) - w(x)\lambda + 2w(x)\lambda - \lambda w(x) = 0$

$Dw''(x) = 0$

$w(x) = 0$

$X_1(x) = e^{rx}$ dan $X_2(x) = w(x)e^{rx} = 0e^{rx} = 0$ merupakan solusi bebas linear dari persamaan diferensial homogen tersebut. Dengan demikian, solusi umumnya dapat dituliskan pada Persamaan (17) sebagai berikut:

$$X(x) = P_1X_1(x) + P_2X_2(x)$$
$$X(x) = P_1e^{rx} + P_2(0)$$
$$X(x) = P_1e^{rx} \quad (17)$$

Sedangkan solusi khususnya ditentukan dengan mencari nilai dari P_1 yang disubstitusikan pada syarat batasnya ($X(0) = 0$ dan $X(L) = 0$) yaitu:

Syarat batas pertama :

$$X(0) = 0$$
$$P_1e^{r0} = 0$$
$$P_1e^0 = 0$$
$$P_1 = 0$$

Syarat batas kedua:

$$X(L) = 0$$
$$P_1e^{rL} = 0$$
$$P_1 = 0$$

Karena $e^{r_2L} \neq 0$ maka diperoleh $P_1 = 0$, sehingga diperoleh

$$X(x) = 0e^{rx} = 0$$

Sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk $u^2 + 4D\lambda = 0$.

Kemungkinan (iii). Misalkan akar karakteristik dari Persamaan (12) merupakan akar imajiner (bilangan kompleks) dan berbeda ($r_1 \neq r_2$). Maka dapat ditulis r_1 dan r_2 sebagai berikut $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dimana α dan β adalah bilangan real.

Misalkan $\alpha = \frac{u}{2D}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{u^2+4D\lambda}}{2D}$. Selanjutnya, dengan menyatakan bahwa fungsi e^{r_1x} dan e^{r_2x} adalah solusi untuk Persamaan (12) dengan menggunakan rumus euler maka diperoleh:

$e^{r_1x} = e^{(\alpha+i\beta)x}$

$= e^{\alpha x}e^{i\beta x}$

$= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

$e^{r_2x} = e^{(\alpha-i\beta)x}$

$= e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$

$= e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

Maka solusi umum dari Persamaan (12) ditulis :

$X(x) = P_1e^{r_1x} + P_2e^{r_2x}$

$= P_1\left(e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right) + P_2(e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x))$

$= (P_1 + P_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(P_1 - P_2)e^{\alpha x}\sin\beta x$

$X(x) = (P_1 + P_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(P_1 + P_2)e^{\alpha x}\sin\beta x$

Sedangkan solusi khususnya ditentukan dengan mencari nilai dari P_1 dan P_2 yang disubstitusikan pada syarat batasnya ($X(0) = 0$ dan $X(L) = 0$) yaitu:

Syarat batas pertama :

$$X(0) = 0$$
$$(P_1 + P_2)e^{\alpha 0}\cos\beta(0) + i(P_1 - P_2)e^{\alpha 0}\sin\beta(0) = 0$$
$$(P_1 + P_2)e^{0}\cos 0 + i(P_1 - P_2)e^{0}\sin 0 = 0$$
$$(P_1 + P_2)(1)(1) + i(P_1 - P_2)(1)(0) = 0$$
$$P_1 + P_2 = 0$$
$$P_1 = -P_2$$

Batas Syarat Kedua:

$$X(L) = 0$$
$$(P_1 + P_2)e^{\alpha L}\cos\beta(L) + i(P_1 - P_2)e^{\alpha L}\sin\beta(L) = 0$$
$$(-P_1 + P_2)e^{\alpha L}\cos\beta(L) + i(-P_1 - P_2)e^{\alpha L}\sin\beta(L) = 0$$
$$(0)e^{\alpha L}\cos\beta(L) + i(-2P_2)e^{\alpha L}\sin\beta(L) = 0$$
$$-2iP_2e^{\alpha L}\sin\beta(L) = 0$$
$$P_2e^{\alpha L}\sin\beta(L) = 0$$

Karena $e^{\alpha L} \neq 0$ maka untuk mendapatkan solusi tak trivial haruslah $P_2 \neq 0$ dan $\sin\beta(L) = 0$.

Dengan demikian, diperoleh

$$X(x) = i(P_1 - P_2)e^{\alpha x}\sin\beta x = P_3e^{\alpha x}\,sin\,\beta x$$

Dan nilai eigennya juga harus memenuhi

$$sin\,\beta L = 0$$
$$\beta L = n\pi$$
$$\beta = \frac{n\pi}{L}$$
$$\frac{\sqrt{u^2 + 4D\lambda}}{2D} = \frac{n\pi}{L}$$
$$\sqrt{u^2 + 4D\lambda} = \frac{2Dn\pi}{L}$$
$$u^2 + 4D\lambda = \left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2$$
$$4D\lambda = \left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2$$
$$\lambda = \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D};\ n = 1,2,3,\ldots$$

Dengan demikian diperoleh fungsi eigen untuk Persamaan (12) yaitu

$$\lambda = \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D}$$

Maka dengan memisalkan $T(t) = e^{jx}$ dimana $j = \lambda$ kita dapat memperoleh penyelesaian umum dari persamaan (11). Perhatikan langkah berikut:

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0$$

$$T'(t) - \left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) T(t) = 0$$

$$T'(t) = \left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D}$$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int \frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} dt$$

$$lnT(t) = \left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t + C$$

$$lnT(t) = lne^{\left(\frac{\left(\frac{2D}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t + C}$$

$$T(t) = e^{\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t + C}$$

$$T(t) = e^{\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t} e^C$$

$$T(t) = Ce^{\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t} ; dimana\ C = e^C$$

Selanjutnya, substitusi $X(x) = C_3 e^{\alpha x} \sin \beta x$ dan $T(t) = Ce^{\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t}$ ke persamaan $c(x,t) = X(x)T(t)$

Perhatikan bahwa

$$c(x,t) = X(x)T(t)$$

$$= X(x)T(t)$$

$$= [C_3 e^{\alpha x} \sin \beta x] \left[Ce^{\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t} \right]$$

$$= [C_3 C e^{\alpha x} \sin \beta x] \left[e^{\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D} \right) t} \right]$$

$$= B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x+\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2-u^2}{4D}\right)t}$$

Jadi, penyelesaian persamaan difusi adveksi satu dimensi adalah

$$C_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x+\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2-u^2}{4D}\right)t} \tag{18}$$

Dimana B_n merupakan konstanta, dengan prinsip suporposisi maka persamaan adveksi satu dimensi yang linear dari Persamaan (18) menjadi

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x,t)$$

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x+\left(\frac{\left(\frac{2Dn}{L}\right)^2-u^2}{4D}\right)t} \tag{19}$$

Untuk menyelesaikan persamaan satu dimensi (dengan kondisi batas nol), maka Persamaan (19) menunjukkan persamaan difusi adveksi yang dapat diselesaikan jika syarat awalnya adalah

$$C(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} \tag{20}$$

3. Menentukan koefisien B_n

Untuk menentukan koefisien B_n diasumsikan bahwa

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} \tag{21}$$

Berdasarkan ulasan persamaan difusi adveksi maka fungsi eigen $sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}$ memenuhi faktor integral yaitu

$$\int_0^L sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{L}{2}, & m = n \end{cases} \tag{22}$$

Dimana m dan n adalah bilangan positif

Kedua ruas di Persamaan (21) dikalikan dengan $sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ sehingga diperoleh

$$sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) f(x_0) = sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} \tag{23}$$

Kemudian di integralkan dari $x = 0$ sampai $x = L$

$$\int_0^L sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) f(x_0) dx = \int_0^L sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} \tag{24}$$

Dari Persamaan (22) bahwa tiap elemen jumlahan adalah nol ketika $m \neq n$ dan untuk $m = n$ mempunya kontribusi pada jumlah tak hingga, maka pada Persamaan (24) m dapat diganti n sehingga menjadi

$$\int_0^L sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x_0) \, dx = \int_0^L sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} dx$$

$$\int_0^L sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x_0) \, dx = B_n \int_0^L sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x} dx$$

$$B_n = \frac{\int_0^L sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x_0)\, dx}{\int_0^L sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x}\, dx}$$

$$B_n = \frac{2}{L} e^{-\left(\frac{u}{2D}\right)} \int_0^L f(x_0)\, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_n = -\frac{2e^{-\left(\frac{u}{2D}\right)}}{L}\left(\frac{f(x_0)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)}\right)$$

$$B_n = -\frac{2e^{-\left(\frac{u}{2D}\right)} f(x_0)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n\pi}$$

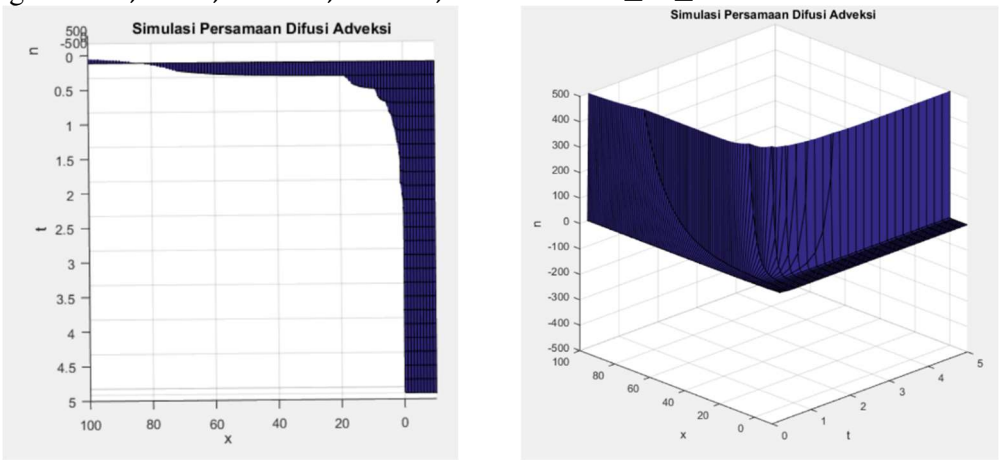
Jadi, solusi persamaan difusi adveksi satu dimensi adalah

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2e^{-\left(\frac{u}{2D}\right)} f(x_0)\, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{n\pi}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x+\left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D}\right)t} \quad (25)$$

SIMULASI

Simulasi I

Pada Simulasi I dengan mengambil hasil solusi pada persamaan difusi adveksi menggunakan metode pemisahan variabel dengan kondisi awal dan syarat batas $c(x,t) = 1$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$ dengan $x = 5, u = 1, L = 100, D = 0.5$, dari interval $1 \leq t \leq 1000$.

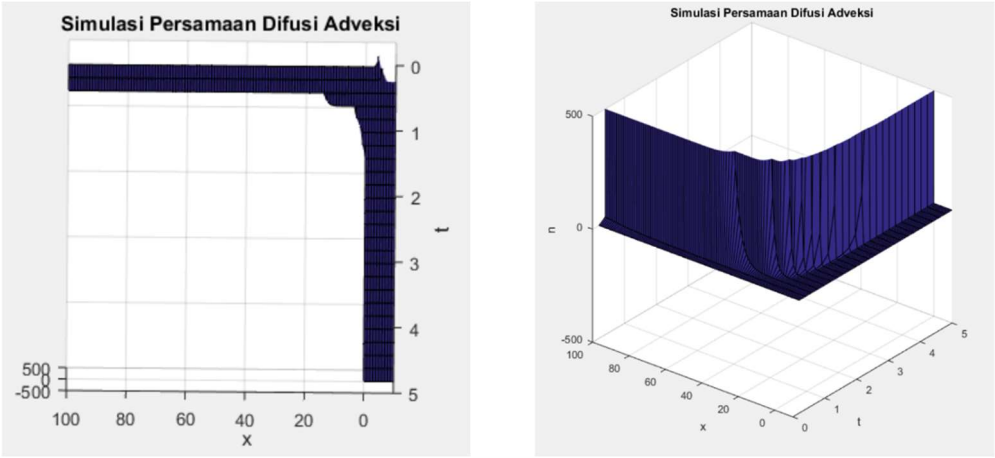


GAMBAR 1. Simulasi I

Pada Gambar 1 menunjukkan hasil simulasi persamaan difusi adveksi. Hasil simulasi terhadap Panjang (x), waktu (t), dan Konsentrasi Penyebaran Zat (C). Dari grafik tersebut misal untuk $x = 10$, pada saat $t = 1$, penyebaran zat terjadi pada angka ± 20. Sedangkan missal pada saat $t = 2$, penyebaran zat terjadi pada angka ± 100.

Simulasi II

Pada Simulasi II dengan mengambil hasil solusi pada persamaan difusi adveksi menggunakan metoe pemisahan variabel dengan kondisi awal dan syarat batas $c(x,t) = 2$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$ dengan $x = 0.1, u = 1, L = 100, D = 0.5$, dari interval $100 \leq t \leq 1000$.

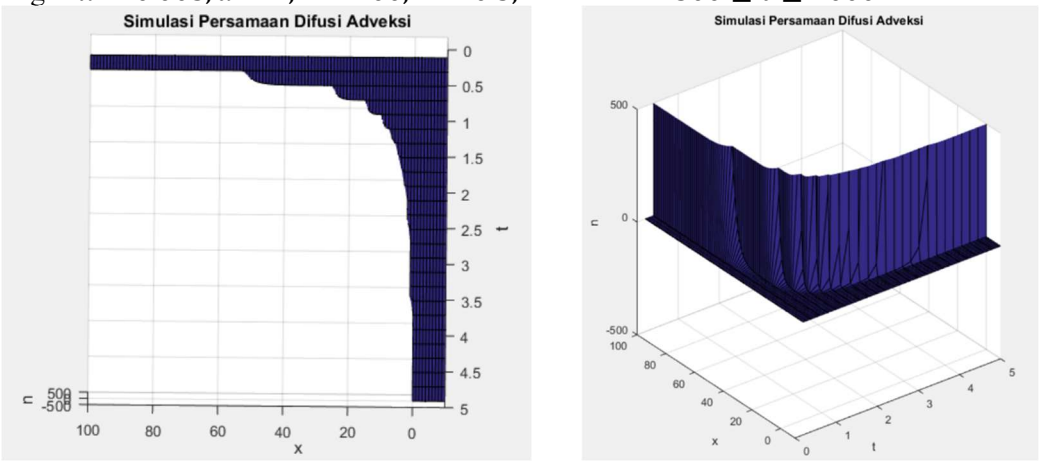


GAMBAR 2. Simulasi II

Pada Gambar 2 menunjukkan hasil simulasi persamaan difusi adveksi. Hasil simulasi terhadap Panjang (x), waktu (t), dan Konsentrasi Penyebaran Zat (C). Dari grafik tersebut misal untuk $x = 40$, pada saat $t = 2$, penyebaran zat terjadi pada angka ± 10. Sedangkan pada saat $t = 4$, penyebaran zat terjadi pada angka ± 200.

Simulasi III

Pada Simulasi III dengan mengambil hasil solusi pada persamaan difusi adveksi menggunakan metoe pemisahan variabel dengan kondisi awal dan syarat batas $c(x,t) = 0.1$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0$ dengan $x = 0.003, u = 1, L = 100, D = 0.5$, dari interval $500 \leq t \leq 1000$.



GAMBAR 3. Simulasi III

Pada Gambar 3 menunjukkan hasil simulasi persamaan difusi adveksi. Hasil simulasi terhadap Panjang (x), waktu (t), dan Konsentrasi Penyebaran Zat (C). Dari grafik tersebut misal untuk $x = 20$, pada saat $t = 1$, penyebaran zat terjadi pada angka ± 50. Sedangkan pada saat $t = 4$, penyebaran zat terjadi pada angka ± 250.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa :

1. Solusi Persamaan Difusi Adveksi dengan Metode Pemisahan Variabel diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Membentuk persamaan difusi adveksi dengan metode pemisahan variabel $c(x,t) = X(x) \times T(t)$.
b. Mengumpulkan fungsi yang tergantung pada x pada ruas kiri, fungsi tergantung pada t pada ruas kanan, dan kedua ruas harus sama dengan sebuah konstanta, sehingga didapat dua persamaan diferensial biasa.
c. Menentukan $X(x)$ dan $T(t)$ (fungsi eigen) dari persamaan diferensial biasa.
d. Nilai eigen yang dapat disubstitusika pada persamaan diferensial biasa $T'(t) - \lambda T(t) = 0$.
e. $X(x)$ dan $T(t)$ dari persamaan diferensial biasa diketahui disubstitusikan ke $C_n(x,t)$.
f. Dengan menggunakan prinsip superposisi diperoleh
$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\left(\frac{u}{2D}\right)x + \left(\frac{\left(\frac{2Dn\pi}{L}\right)^2 - u^2}{4D}\right)t}$.
g. Konstanta B_n ditentukan dengan menggunakan syarat awal $C(x,0) = f(x_0)$ dan ekstensi deret fourier.

2. Dari 3 hasil Simulasi dengan dapat disimpulkan bahwa semakin luas penampang (x) maka akan semakin besar penyebaran konsentrasi zat, semakin lama waktu (t) maka semakin jelas terjadi penyebaran konsentrasi zat. Dan dari grafik tersebut juga dapat disimpulkam bahwa untuk nilai (x) dan (t) yang besar dan kecil, tidak adanya perubahan signifikan pada grafik tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., P. hd. (1992). *Angkutan Limbah*.

Josua, Evi Noviani, F. F. (2020). *Fungsi Green Untuk Persamaan Difusi - Adveksi Dengan Syarat Batas Dirichlet*. *14*(2), 211–222.

Noviani, E., & Fran, F. (2020). *Fungsi Green Untuk Persamaan Difusi - Adveksi Dengan Syarat Batas Dirichlet*. *14*(2), 205–216.

Oktavia, D. (2018). *Solusi Asimtotik Pada Persamaan Difusi Dengan Waktu Singkat. Jurnal Matematika UNAND*, *7*(1), 59. https://doi.org/10.25077/jmu.7.1.59-63.2018

Paskalia, M. (2018). *Penyelesaian Numeris Persamaan Adveksi-Difusi Menggunakan Metode Beda Hingga*. *Skripsi*.

Azizah, L. (2019). *Penyelesaian Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D Menggunakan Metpde Galerkin-Beda Hingga. Skripsi*.

Dodi Jesaya Sinaga, Endang Rusyaman, Edi Kurniadi, (2020). Solusi Persamaan Difusi Menggunakan Metode Transformasi Laplace Diferensial dan Perilakunya Terhadap Solusi Eksak. *Jurnal Matematika Integratif*. doi:10.24198/jmi.v16.n2.29180.105-115