Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 74 –80)
Vol. 5. No. 1, April 2022
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Sifat Keherediteran Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt

Delsi Kariman[1, a)] dan Junios Junios[2]

[1]*Program Studi Sains Data, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas PGRI Sumatera Barat*
[2] *Program Studi S2 Keperawatan, Institut Kesehatan Prima Nusantara Bukittinggi*

[a)] delsik@upgrisba.ac.id

***Abstrak**. Tulisan ini mengkaji dua topik yakni sifat keherediteran aljabar lintasan dan sifat keherediteran aljabar lintasan Leavitt. Sifat herediter sangat berguna dalam mengkaji modul projektif atas aljabar. Pada topik pertama diperoleh hasil bahwa aljabar lintasan bersifat herediter jika graf hingga, terhubung dan asiklik. Pada topik kedua diperoleh hasil bahwa aljabar lintasan Leaviit bersifat herediter jika graf hingga.*
***Kata Kunci:** Graf (Berarah), Aljabar Lintasan, Representasi Graf, Modul Projektif, Aljabar Lintasan Leavitt*

***Abstract.** This article deals with two topics, namely the hereditary property of path algebras and the hereditary property of Leavitt path algebras. The hereditary property is advantageous in studying projective modules over algebras. In the first topic, the path algebras are hereditary if the graph is finite, connected, and acyclic. In the second topic, Leavitt path algebras are hereditary if the graph is finite.*
***Keywords:** (Oriented) Graph, Path Algebras, Representation of Graph, Projective Modules, Leavitt Path Algebras*

LATAR BELAKANG

Suatu aljabar A dikatakan herediter kiri jika setiap ideal kiri dari A bersifat projektif sebagai A-modul. Tulisan ini mengkaji sifat keherediteran aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt. Aljabar lintasan KE adalah aljabar bebas atas lapangan K pada graf E dengan basis semua lintasan dalam E yang memenuhi dua syarat: 1) setiap titik dalam graf bersifat idempoten dan perkalian sebarang dua titik berbeda hasilnya nol; 2) sebarang sisi dikalikan titik akhirnya, sama dengan titik awalnya dikalikan sisi tersebut, dan sama dengan sisi itu sendiri (Assem, Skowronski, & Simson, 2006; Kariman, Irawati, & Muchtadi-Alamsyah, 2019; Kariman, Irawati, & Muchtadi-Alamsyah, 2021). Keuntungan pengkajian aljabar lintasan adalah kemudahan dalam memvisualisasi, yang sangat berguna untuk kajian representasi aljabar, karena sifat-sifat aljabar lintasan yang dapat dibaca seperti dimensi, kesederhanaan, melalui sifat-sifatnya (Risnawita, Kariman, & Muchtadi-Alamsyah, 2021).

Sebarang graf E dapat diperluas dengan cara menambahkan himpunan sisi-sisi dengan arah kebalikan dari sisi-sisi dalam graf E, graf ini dinamakan dengan graf perluasan dan dinotasikan dengan $\hat{E}$. Aljabar lintasan dari graf perluasan $\hat{E}$ yang memenuhi relasi Cuntz-Krieger disebut dengan aljabar lintasan Leavitt $L_K(E)$. Aljabar lintasan Leavitt diperkenalkan oleh Abrams dan Aranda Pino pada tahun 2005 (Abrams & Aranda Pino, 2005). Penelitian-penelitian tentang karakterisasi aljabar lintasan Leavitt telah banyak dilakukan, yaitu aljabar lintasan Leavitt yang berdimensi hingga (Abrams & Aranda Pino, 2005), aljabar lintasan Leavitt yang bersifat sederhana (Abrams, Aranda Pino, & Siles Molina, 2008), aljabar lintasan Leavitt yang bersifat Noether (Abrams & Aranda Pino, 2008), aljabar lintasan Leavitt yang bersifat prima (Aranda Pino, Pardo, & Siles Molina, 2006), dan aljabar lintasan Leavitt yang bersifat semiprima (Aranda Pino, Barquero, Gonz´alez, & Siles Molina, 2008).

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan adalah eksplorasi dan adaptasi dari hasil-hasil yang sudah ada melalui studi literatur.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Aljabar Lintasan

Pertama diberikan definisi graf berarah atau disebut juga dengan kuiver yang selanjutnya hanya dikatakan graf saja.

Definisi 3.1. (Assem et al., 2006) Suatu graf $E = (E^0, E^1, r, s)$ adalah empat terurut yang terdiri atas himpunan E^0 yang beranggotakan titik-titik, himpunan E^1 yang beranggotakan sisi-sisi, pemetaan $r : E^1 \to E^0$ dan pemetaan $s : E^1 \to E^0$. Untuk setiap $e \in E^1$, titik $s(e) \in E^0$ dinamakan titik awal dari e dan $r(e)$ dinamakan titik akhir dari e.

Suatu graf $E = (E^0, E^1, r, s)$ dapat ditulis secara singkat menjadi $E = (E^0, E^1)$ atau E. Suatu sisi $e \in E^1$ dengan titik awal $v = s(e)$ dan titik akhir $w = r(e)$ dapat dituliskan menjadi $e : v \to$ w, dikatakan bahwa v memancarkan (*emit*) e, dan w menerima e. Titik yang tidak memancarkan sisi dinamakan *sink*. Titik v dikatakan regular jika $s^{-1}(v)$ hingga dan tak kosong. Jika $s^{-1}(v)$ himpunan hingga untuk setiap $v \in E^0$, maka graf E disebut graf baris hingga. Jika E^0 hingga, dengan hipotesis graf baris hingga maka E^1 hingga, sehingga graf E hingga. Graf E dikatakan terhubung jika graf yang diperoleh dari E dengan menghilangkan arah pada panah-panahnya adalah graf terhubung.

Suatu lintasan μ di graf E dengan panjang n adalah barisan sisi-sisi, katakan $\mu = e_1 e_2 \cdots e_n$ dengan $e_i \in E^1$ dan $r(e_i) = s(e_{i+1})$ untuk $1 \le i \le n-1$. Titik awal dan titik akhir dari lintasan μ secara berurutan dinotasikan dengan $s(\mu)$ dan $r(\mu)$, dengan $s(\mu) = s(e_1)$ dan $r(\mu) = s(e_n)$.

Suatu titik $v \in E^0$ dipandang sebagai lintasan panjang 0, dinotasikan $v = s(v) = r(v)$ dan dinamakan lintasan trivial atau lintasan stasioner pada v. Siklus yang panjangnya 1 disebut *loop*. Suatu graf E dikatakan asiklik jika E tidak memuat siklus.

Himpunan semua lintasan dengan Panjang n dinotasikan E^n dan $\mathrm{Path}(E) = \bigcup_{n\geq 0} E^n$ adalah himpunan semua lintasan dalam graf E.

Komposisi lintasan-lintasan dapat mendefinisikan operasi perkalian lintasan pada graf E.

Definisi 3.2. (Assem et al., 2006) Perkalian antara dua lintasan $(a|e_1, \cdots, e_l|b)$ dan $(c|f_1, \cdots, f_k|d)$ didefinisikan oleh

$$(a|e_1, \cdots, e_l|b)(c|f_1, \cdots, f_k|d) = \delta_{bc}(a|e_1, \cdots, e_l, f_1, \cdots, f_k|d)$$

dengan δ_{bc} adalah fungsi Kronecker delta. Dengan kata lain hasil perkalian dua lintasan $e_1, \cdots, e_l$ dan $f_1, \cdots, f_k$ sama dengan nol jika $r(e_l) \neq s(f_1)$ dan sama dengan lintasan $e_1, \cdots, e_l, f_1, \cdots, f_k$ jika $r(e_l) = s(f_1)$.

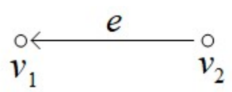
Pendefinisian operasi perkalian lintasan tersebut dapat digunakan untuk mendefinisikan suatu aljabar yang dinamakan dengan aljabar lintasan.

Definisi 3.3. (Abrams & Aranda Pino, 2005) Misalkan K suatu lapangan dan E suatu graf. Aljabar lintasan KE didefinisikan sebagai K-aljabar dengan basis ruang vektornya adalah himpunan semua lintasan dengan panjang $n \geq 0$ di E dan memenuhi relasi:

(1) $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ untuk setiap $v_i, v_j \in E^0$.

(2) $e_i = e_i r(e_i) = s(e_i) e_i$ untuk setiap $e_i \in E^1$.

Contoh 3.4. (a) Misalkan E graf



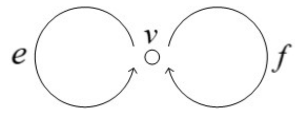
Aljabar lintasan KE memiliki basis $\{v_1, v_2, e\}$ dengan $v_1 v_1 = v_1$, $v_2 v_2 = v_2$, $v_2 e = e$, $e v_1 = e$ dan $v_1 v_2 = v_2 v_1 = v_1 e = e v_2 = 0$. Jelas bahwa KE isomorfik dengan aljabar matriks segitiga bawah 2×2

$$T_2(K) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in K \right\}$$

Dengan isomorfisma diberikan oleh

$$v_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Misalkan E graf



Basis dari aljabar lintasan KE adalah himpunan semua lintasan yang berbentuk $e^l f^k, f^l e^k$ untuk semua $l, k \geq 0$ dengan $e^0 = f^0 = v$ dan lintasan panjang nol v adalah unsur identitas dari KE. Jelas bahwa KE isomorfik dengan aljabar bebas dalam dua variabel tak komutatif $K\langle t_1, t_2 \rangle$, dengan isomorfisma diberikan oleh

$$v_1 \mapsto 1, e \mapsto t_1, \text{dan } f \mapsto t_2$$

Misalkan I ideal *admissible*, dengan menggunakan graf terbatas (E, I) yang berkorespondensi dengan suatu aljabar A, setiap A-modul berdimensi hingga M dapat digambarkan sebagai representasi K-linear dari (E, I), yaitu koleksi K-ruang vektor berdimensi hingga M_a, dengan $a \in E^0$, yang dihubungkan dengan pemetaan K-linear $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$ yang berkorespondensi dengan sisi $\alpha : a \to b$ di E dan memenuhi suatu relasi yang diberikan oleh I.

Teorema 3.5. (Assem et al., 2006) Misalkan (E, I) suatu graf terbatas, $A = KE/I$ dan $P(a) = e_a A$ dengan $a \in E^0$. Jika $P(a) = \big(P(a)_b, \varphi_\beta\big)$ maka $P(a)_b$ adalah K-ruang vektor dengan basis himpunan semua $\overline{\omega} = \omega + I$, dengan ω adalah lintasan dari a ke b dan untuk setiap sisi $\beta : b \to c$, pemetaan K-linier $\varphi_\beta \,:\, P(a)_b \to P(a)_c$ diberikan oleh perkalian kanan dengan $\bar{\beta} = \beta + I$.

Dikatakan bahwa $P(a)$ adalah A-modul projektif tak terdekomposisi yang bersesuaian dengan titik $a \in E^0$.

Selanjutnya A menotasikan aljabar lintasan yang bersesuaian dengan graf E.

Definisi 3.6. (Assem et al., 2006) Aljabar A dikatakan herediter kanan jika setiap ideal kanan dari A bersifat projektif sebagai A-modul.

Aljabar herediter kiri didefinisikan sebagai dual aljabar herediter kanan.

Teorema 3.7. Misalkan E suatu graf hingga, terhubung dan asiklik. Aljabar lintasan $A = KE$ bersifat herediter.

Bukti. Misalkan E graf hingga, terhubung, dan asiklik. Misalkan ε_a lintasan stasioner pada $a \in E^0$. Untuk menunjukkan $A = KE$ herediter, ditunjukkan bahwa untuk setiap A-modul projektif tak terdekomposisi $P(a)$, rad $P(a)$ juga A-modul projektif.

Misalkan $a \in E^0$, maka $P(a) = \big(P(a)_b, \varphi_\beta\big)$ dengan $P(a)_b = \varepsilon_a(KE)\varepsilon_b$ yang memiliki basis yaitu himpunan semua lintasan dari a ke b dan untuk setiap sisi $\beta : b \to c$, pemetaan K-linier $\varphi_\beta \,:\, P(a)_b \to P(a)_c$ didefinisikan oleh $\varphi_\beta(x) = x\beta$ dengan $x \in P(a)_b$, oleh karena itu φ_β injektif. Untuk $x, y \in E^0$, misalkan $\omega(x, y)$ menotasikan banyaknya lintasan dari x ke y, diperoleh $dim_K P(a)_b = \omega(a, b)$. Maka rad $P(a) = \big(J_b, \gamma_\beta\big)$ suatu representasi dari E dengan

$J_b = P(a)_b$ untuk $b \neq a, J_a = 0$ dan $\gamma_\beta = \varphi_\beta$ untuk sebarang sisi β dengan titik awal $b \neq a$.

Misalkan $\{b_1, \cdots, b_t\}$ himpunan semua penerus langsung dari a di E dan n_i adalah banyaknya sisi dari a ke b_i untuk $1 \leq i \leq t$. Misalkan top$\big($rad $P(a)\big) = (L_b, \varphi_\beta)$ maka untuk $b = a$ diperoleh $L_b = 0$ sedangkan jika b titik awal dan $b \neq a$ maka $L_b = J_b = P(a)_b = 0$ (karena jika ada sisi yang menuju b maka b bukan titik awal). Kasus terakhir yaitu jika b bukan titik awal dan $b \neq a$ maka

$$L_b = \sum_{\beta: c \to b} Coker\big(\gamma_\beta : J_c \to J_b\big) = \sum_{\beta: c \to b} Coker\big(\gamma_\beta : P(a)_c \to P(a)_b\big) = \sum_{\beta: c \to b} \frac{P(a)_b}{Peta(\gamma_\beta)}$$

Akibatnya jika b bukan penerus langsung dari a maka $L_b = 0$ sedangkan jika b adalah penerus langsung dari a maka L_b adalah K-ruang vektor dengan basis semua sisi a ke b. Diperoleh $L_{b_i} \cong S(b_i)^{n_i}$ (isomorfisma K-ruang vektor) karena $S(b_i)$ K-ruang vektor berdimensi satu dan akibatnya top(rad $P(a)$) $\cong \bigoplus_{i=1}^{t} S(b_i)^{n_i}$. Perhatikan bahwa $S(b_i) = top\ P(b_i)$, sehingga

$$\begin{aligned} top\ \big(rad\ P(a)\big) &\cong \bigoplus_{i=1}^{t} S(b_i)^{n_i} = \bigoplus_{i=1}^{t} \big(top\ P(b_i)\big)^{n_i} \\ &= top\ \Big(\bigoplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i}\Big) \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh penutup projektif $f : P(rad\, P(a) \to rad\, P(a))$. Klaim bahwa $P(rad\, P(a)) \cong \oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i}$. Diperoleh juga penutup projektif $g : P\big(rad\, P(a)\big) \to top(P(rad\, P(a)))$ dan $h : \oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i} \to top(\oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i})$ serta $top\ (P(rad\, P(a))) \cong top(rad\, P(a)) \cong top(\oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i})$. Sehingga $P(rad\, P(a)) \cong \oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i}$, klaim terbukti. Oleh karena itu diperoleh penutup projektif $f : \oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i} \to rad\, P(a)$. Untuk $b \neq a$ di E dimiliki

$$dim_K[rad\, P(a)]_b = dim_K J_b = dim_K P(a)_b = w(a,b) = \sum_{i=1}^{t} n_i w(b_i, b)$$
$$= \sum_{i=1}^{t} n_i dim_K P(b_i)_b = dim_K \left[\bigoplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i}\right]_b$$

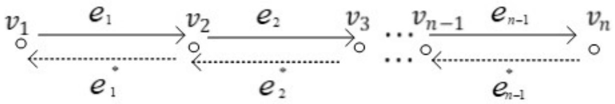
Ini berarti $dim_K\big(rad\, P(a)\big) = dim_K(\oplus_{i=1}^{t} P(b_i)^{n_i})$ dan akibatnya Inti $(f) = 0$. Jadi $f : P\big(rad\, P(a)\big) \to radP(a)$ merupakan suatu isomorfisma. Sehingga dapat disimpulkan $rad\, P(a)$ adalah modul projektif. Jadi aljabar $A = KE$ adalah aljabar herediter.□

Aljabar Lintasan Leavitt

Graf E dapat diperluas dengan memandang arah sebaliknya dari sisi-sisi dalam E^1. Sisi dalam E^1 disebut sisi nyata dan sisi dengan arah berlawanan dari sisi nyata disebut sisi hantu. Himpunan sisi hantu dalam E dinotasikan dengan $(E^1)^*$. Graf perluasan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.8. (Abrams & Aranda Pino, 2005) Misalkan E suatu graf. Graf perluasan E adalah graf baru $\hat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$ dengan $(E^1)^* = \{e_i^* | e_i \in E^1\}$ dan fungsi r' dan s' didefinisikan sebagai $r'|_{E^1} = r$, $s'|_{E^1} = s$, $r'(e_i^*) = s(e_i)$, dan $s'(e_i^*) = r(e_i)$.

Berikut adalah contoh dari graf perluasan



Definisi 3.9. (Abrams & Aranda Pino, 2005) Misalkan E sebarang graf dan K lapangan, aljabar lintasan Leavitt $L_K(E)$ didefinisikan sebagai K-aljabar yang dibangun oleh himpunan $\{v : v \in E^0\}$ idempoten ortogonal bersama dengan himpunan $\{e, e^* : e \in E^1\}$ yang memenuhi kondisi berikut:

(1) $s(e)e = e = er(e)$ untuk semua $e \in E^1$

(2) $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$ untuk semua $e \in E^1$

(3) (CK1) $e^*f = \delta_{ef} r(e)$ untuk semua $e, f \in E^1$

(4) (CK2) untuk setiap titik regular $v \in E^0$,

$$v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*$$

Kondisi (CK1) dan (CK2) disebut relasi Cuntz-Krieger. Khususnya kondisi (CK2) adalah relasi Cuntz-Krieger di $v \in E^0$. Jika v *sink*, tidak dimiliki kondisi (CK2) di v. Jadi dapat dikatakan bahwa aljabar lintasan Leavitt merupakan aljabar lintasan dari graf perluasan $\hat{E}$ yang memenuhi kondisi (CK1) dan (CK2).

Setiap unsur a dari $L_K(E)$ dapat ditulis sebagai

$$a = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \beta_i^*$$

dengan k_i adalah unsur tak nol dari K, dan setiap α_i dan β_i adalah lintasan di E. Jika $\alpha \in \mathrm{Path}(E)$ maka dapat dipandang $\alpha \in L_K(E)$, dan lintasan α seperti ini disebut juga lintasan nyata di $L_K(E)$. Secara analog, untuk $\beta = e_1 e_2 \cdots e_n$ maka $\beta^* = e_n^* e_{n-1}^* \cdots e_1$ adalah lintasan hantu di $L_K(E)$.

Selanjutnya diperkenalkan isomorfisma monoid graf E dan monoid kelas isomorfisma modul projektif atas $L_K(E)$ yang dibangun secara hingga. Pertama dibutuhkan dua definisi berikut.

Definisi 3.10. (Ara et al., 2007) Misalkan E sebarang graf. Monoid komutatif bebas pada himpunan pembangun $\{a_v : v \in E^0\}$ dinotasikan dengan M_E, modulo relasi diberikan oleh

$$a_v = \textstyle\sum_{\{e \in E^1 \,:\, s(e)=v\}} a_{r(e)}$$

untuk setiap v yang bukan *sink* atau memancarkan tak hingga sisi.

Definisi 3.11. (Ara et al., 2007) Misalkan $L_K(E)$ aljabar lintasan Leavitt. Himpunan kelas isomorfisma $L_K(E)$-modul kiri projektif yang dibangun secara hingga dinotasikan dengan $V(L_K(E))$. Himpunan $V(L_K(E))$ adalah monoid komutatif dengan mendefinisikan

$$[P] + [Q] \coloneqq [P \oplus Q]$$

untuk $[P], [Q] \in V(L_K(E))$.

Teorema 3.12. (Ara et al., 2007) Misalkan E graf baris hingga. Maka terdapat isomorfisma monoid natural $V(L_K(E)) \cong M_E$. Lebih lanjut, jika E hingga, maka dimensi global $L_K(E) \leq 1$.

Selanjutnya teorema berikut menjelaskan hubungan antara aljabar herediter kanan A dengan dimensi global dari A.

Teorema 3.13. (Assem et al., 2006) Misalkan A suatu aljabar. Pernyataan berikut ekivalen:

(1) Aljabar A herediter kiri

(2) Dimensi global dari $A \leq 1$

Akibat 3.14. Misalkan E graf hingga. Aljabar lintasan Leavitt $L_K(E)$ bersifat herediter.

Bukti. Dengan mengaplikasikan Teorema 3.13 pada Teorema 3.12, maka dapat disimpulkan bahwa aljabar lintasan Leavitt $L_K(E)$ bersifat herediter jika E graf hingga.

KESIMPULAN

Syarat perlu dan syarat cukup suatu aljabar lintasan bersifat herediter adalah graf dari aljabar lintasan hingga, terhubung dan asiklik, sedangkan untuk aljabar lintasan Leavitt adalah graf hingga.

DAFTAR PUSTAKA

Abrams, G., & Aranda Pino, G. (2005). The Leavitt path algebra of a graph. *Journal of Algebra*, *293*(2), 319–334. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.028

Abrams, G., & Aranda Pino, G. (2008). The Leavitt Path Algebras of Arbitrary Graph. *Houston J, Math*, *34*(1), 423–442. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0464-4

Abrams, G., Aranda Pino, G., & Siles Molina, M. (2008). Locally finite Leavitt path algebras. *Israel Journal of Mathematics*, *165*, 329–348. https://doi.org/10.1007/s11856-008-1014-1

Ara, P., Moreno, M. A., & Pardo, E. (2007). Nonstable K-theory for graph algebras. *Algebras and Representation Theory*, *10*(2), 157–178. https://doi.org/10.1007/s10468-006-9044-z

Aranda Pino, G., Barquero, D. M., Gonz´alez, C. M., & Siles Molina, M. (2008). The socle series of a Leavitt path algebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, *212*(1), 500–509. https://doi.org/10.1007/s11856-011-0074-9

Aranda Pino, G., Pardo, E., & Siles Molina, M. (2006). Exchange Leavitt path algebras and stable rank. *Journal of Algebra*, *305*(2), 912–936. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.12.009

Assem, I., Skowronski, A., & Simson, D. (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. London Math. Soc. Student Texts 65. https://doi.org/10.1017/cbo9780511614309

Kariman, D., Irawati, I., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2019). Modul Herediter atas aljabar Lintasan Leavitt dari Graf A∞. *Jurnal Matematika Integratif*, *15*(1), 63–68. https://doi.org/10.24198/jmi.v15.n1.21027.63-68

Kariman, D., Irawati, I., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2021). Hereditary Modules over Path Algebras of a Quiver Containing Cycles. *Mathematical Theory and Modeling*, *11*(1), 32–39. Retrieved from https://www.iiste.org/Journals/index.php/MTM/article/view/55464/57279

Risnawita, R., Kariman, D., & Muchtadi-Alamsyah, I. (2021). Karakterisasi Modul Prima Dan Modul Herediter Atas Aljabar Nakayama. *Jurnal Matematika UNAND*, *10*(4), 527–537. https://doi.org/10.25077/jmu.10.4.527-537.2021