*Journal of Mathematics, Computations, and Statistics* (hal. 75 – 91)
Vol. 6. No. 1, April 2023
*http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos*

# Analisis Kekonvergenan pada Barisan Peubah Acak di Ruang Riil

Syafruddin Side[1, a)], Wahidah Sanusi[1, b)], Nur Izzah Nurdin[1, c)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar*

[a)] syafruddinside@unm.ac.id
[b)]wahidah.sanusi@unm.ac.id
[c)]nurizzahnurdin17@gmail.com

***Abstrak**. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi dan menjelaskan konsep, sifat asimptotik, hubungan dan terapan dari empat jenis kekonvergenan pada barisan peubah acak yaitu kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi, dan kekonvergenan dalam rata-rata. Hasil dari kajian teori menunjukkan bahwa keempat jenis kekonvergenan ini, tertutup terhadap operasi aritmatika, setiap barisan bagiannya konvergen ke peubah acak yang sama, tetap konvergen di fungsi kontinunya, dan memiliki hubungan antara tiap-tiap jenisnya yaitu: (a) jika barisan peubah acak konvergen hampir pasti maka barisan tersebut konvergen dalam peluang berlaku sebaliknya jika barisan tersebut mempunyai barisan bagian yang konvergen hampir pasti ke limitnya, (b) jika barisan peubah acak konvergen dalam peluang maka barisan tersebut konvergen dalam distribusi berlaku sebaliknya jika limitnya suatu konstanta real, (c) jika barisan peubah acak konvergen dalam rata-rata maka barisan tersebut konvergen dalam peluang berlaku sebaliknya jika barisan tersebut terbatas dalam peluang, dan (d) tidak ada hubungan antara konvergen dalam rata-rata dan konvergen hampir pasti, serta dapat digunakan dalam pembuktian Hukum Bilangan Besar, Teorema Limit Pusat dan limit distribusi.*
***Kata Kunci:** Kekonvergenan Hampir Pasti, Kekonvergenan dalam Peluang, Kekonvergenan dalam Distribusi, Kekonvergenan dalam Rata-rata.*

***Abstract.**This research aims to identify and explain the concepts, asymptotic properties, relationships and applications of four types of convergence of a sequence of random variable, namely convergence almost surely, convergence in probability, convergence in distribution and convergence in mean. The results of the theoretical study shows that these four types of convergence, are closed to arithmetic operations, each subsequence is convergent to the same random variable, remains convergent in the continuous function, and has a relationship between each type, namely: (a) if the sequence of random variable convergent almost surely then this sequence convergent in probability and otherwise if the sequence has a subsequence that convergent almost surely to its limit, (b) if the sequence of random variable convergent in probability then this sequence convergent in distribution and otherwise if the limit is a real constant, (c) if the sequence of random variable convergent in mean then this sequence convergent in probability and otherwise if the sequence is bounded in probability and (d) there is no relationship between convergent in mean and convergent almost surely, and also can be used in proving the Law of Large Number, Central Limit Theorem and limit distribution.*
***Keywords:** Convergence Almost Surely, Convergence in Probability, Convergence in Distribution, Convergence in Mean.*

## PENDAHULUAN

Peubah acak adalah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel. Sekumpulan peubah acak dapat membentuk barisan bilangan real yang disebut barisan peubah acak, sehingga kekonvergenan pada barisan peubah acak dapat dikaji sebagaimana kekonvergenan pada barisan bilangan real (Sungkono, 2013). Dasar-dasar matematis tentang kekonvergenan pada barisan peubah acak dapat digunakan dalam pembuktian Teorema Limit Pusat dan Hukum Bilangan Besar, kedua teorema tersebut merupakan hal yang mendasar dalam statistika yang berperan dalam pendugaan parameter populasi (Tinungki, 2018). Dengan demikian, kajian mengenai kekonvergenan pada barisan peubah acak sangat menarik untuk dikaji karena keterpakaiannya dalam membantu pembuktian teorema-teorema tertentu (Agusta dkk., 2019). Terdapat berbagai jenis kekonvergenan pada barisan peubah acak yaitu kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi dan kekonvergenan dalam rata-rata (Bhat, 1981). Dalam berbagai referensi khususnya di bidang statistika matematika mengenai teori peluang, disebutkan adanya hubungan antara jenis konvergen yang satu dengan jenis konvergen yang lain. Sungkono (2013) telah membahas tentang hubungan dari dua jenis kekonvergenan peubah acak yaitu Kekonvergenan dalam *Probabilitas* dan Kekonvergenan *Almost Surely* di dalam jurnalnya yang berjudul *"Kekuatan Konvergensi dalam Probabilitas dan Konvergensi Almost Surely"*, Agusta, Putri dan Syahrul (2019) juga membahas tentang hubungan dari empat jenis kekonvergenan peubah acak di dalam jurnalnya yang berjudul "*Keterkaitan antara Konvergen Almost Surely, Konvergen dalam Probabilitas, Konvergen dalam Mean dan Konvergen dalam Distribusi*" dan Tinungki (2018) membahas tentang penerapan dari kekonvergenan peubah acak di dalam jurnalnya yang berjudul *"Ketidaksamaan Chebyshev Hukum Bilangan Besar pada Bisnis Asuransi"*. Oleh karena itu, artikel ini akan membahas mengenai konsep, sifat-sifat asimptotik, hubungan dan terapan dari empat jenis kekonvergenan pada barisan peubah acak yaitu kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi dan kekonvergenan dalam rata-rata.

## METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature yaitu dengan membaca beberapa literature yang berhubungan dengan kekonvergenan pada barisan peubah acak. Adapun literature utama yang digunakan adalah buku yang ditulis oleh Bhat (1981) yang berjudul "*Modern Probability Theory*". Langkah pertama yang dilakukan adalah mempelajari konsep kekonvergenan barisan bilangan real, limit fungsi, fungsi kontinu, konsep dasar peluang, peubah acak, nilai harapan suatu peubah acak dan jenis-jenis distribusi peubah acak sebagai landasan utama dari konsep kekonvergenan pada barisan peubah acak. Selanjutnya, memberikan definisi dan contoh terkait empat jenis kekonvergenan barisan peubah acak yaitu kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi dan kekonvergenan dalam rata-rata. Kemudian, mengkaji beberapa sifat asimptotik dan hubungan dari empat jenis kekonvergenan nya. Langkah terakhir adalah mengkaji penerapan teori kekonvergenan pada barisan peubah acak berupa pemaparkan pembuktian beberapa teorema terapan.

## HASIL PENELITIAN

Konsep barisan bilangan real diperluas menjadi barisan fungsi. Dilihat dari namanya, barisan fungsi dapat dibayangkan sebagai koleksi fungsi $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$ dimana $f_k$ adalah fungsi real dengan $k = 1,2,3, \dots$ adalah domain himpunan bilangan asli. Ketika nilai peubah $x$ disubstitusi oleh sebuah bilangan maka barisan fungsi menjadi barisan bilangan real biasa. Oleh karena barisan yang terbentuk bergantung pada nilai $x$ yang diberikan maka begitu juga kekonvergenannya (Hernadi, 2015).

Suatu barisan elemennya tidak harus bilangan akan tetapi bisa juga objek yang lain. Sebagai contoh jika objeknya peubah acak maka didapat barisan peubah acak. Barisan peubah acak dapat dinyatakan sebagai koleksi atau kumpulan peubah acak $(X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \dots)$ dengan $\omega \in S$ ($S$ adalah ruang sampel) dan $X_n$ adalah fungsi peubah acak dengan $n = 1,2,3, \dots.$ adalah domain himpunan bilangan asli.

**Definisi 1 (Papoulis, 1984)**
Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat peubah acak $X_n: S \to \mathbb{R}$, koleksi $(X_n)$ disebut barisan pada $S$ ke $\mathbb{R}$ dan untuk setiap $\omega \in S$ dimana $S$ adalah ruang sampel suatu percobaan, diperoleh barisan peubah acak $X_n(\omega)$.
Bhat (1981) dalam bukunya yang berjudul "*Modern Probability Theory*" menyatakan bahwa di ruang peluang, kekonvergenan pada barisan peubah acak minimal terdiri dari empat jenis yaitu kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi dan kekonvergenan dalam rata-rata.

**Definisi 2 (Bhat, 1981)**
Barisan peubah acak $(X_n)$ konvergen *everywhere* atau konvergen pasti ke peubah acak $X$ jika $X_n(\omega) \to X(\omega),\ \forall \omega \epsilon S$.

**Contoh 1.** Pada ruang sampel $S = [0,1]$, barisan peubah acak $X_n(\omega) = \frac{\omega}{2n}$ konvergen pasti ke peubah acak $(\omega) = 0\ \forall \omega \epsilon S$, barisan peubah acak $X_n(\omega) = \left(1 + \frac{\omega}{n}\right)^n$ konvergen pasti ke peubah acak $(\omega) = e^{\omega}\ \forall \omega \epsilon S$, barisan peubah acak $X_n(\omega) = \omega^n$ konvergen pasti ke peubah acak $X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \omega \in [0,1) \\ 1, & \text{jika } \omega = 1 \end{cases}\ \forall \omega \epsilon S$.

**Kekonvergenan Hampir Pasti**

**Definisi 3 (Bhat, 1981)**
Barisan peubah acak $(X_n)$ dikatakan konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$ jika untuk setiap $\omega \in S$ berlaku

$$P\left(\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Ini berarti, barisan peubah acak $(X_n, \text{n} \in \mathbb{N})$ tidak konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$ jika terdapat $\omega_0 \in S$ sehingga $P\left(\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega_0) = X(\omega_0)\right\}\right) \neq 1$.

Definisi 3 menyatakan bahwa barisan $X_n$ dikatakan konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$ jika $\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} \mathrm{X_n}(\omega) = X(\omega)\right\}$ ada dan peluangnya sama dengan 1 dimana $\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} \mathrm{X_n}(\omega) = X(\omega)\right\}$ adalah peristiwa yang terdiri dari semua hasil $\omega \in S$ sehingga $X_n(\omega)$ konvergen ke $X(\omega)$. Notasi yang digunakan untuk $X_n$ konvergen hampir pasti ke $X$ adalah $X_n \xrightarrow{a.s} X$.

**Contoh 2.** Barisan peubah acak $X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{-1}{n}, & \text{dengan peluang } \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n}, & \text{dengan peluang } \frac{1}{2} \end{cases}\ n \epsilon \mathbb{N}$, konvergen hampir pasti ke 0.

Teorema 1 (Bhat, 1981)
Syarat perlu dan cukup untuk kekonvergenan hampir pasti adalah
1. $\forall \varepsilon > 0$ berlaku $\lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{n=k}^{\infty}\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ berlaku $\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

**Bukti :**
1. Karena $X_n \xrightarrow{a.s} X$ maka $P\left(\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} \mathrm{X_n}(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1 \ldots (i)$

Berdasarkan definisi limit maka persamaan $(i)$ menjadi

$$P(\{\omega \in S: \forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} \ni |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \forall n \geq k\}) = 1$$

Karena pernyataan $\exists k \in \mathbb{N} \ni |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \forall n \geq k$ ekuivalen dengan $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ maka diperoleh

$$P\left(\left\{\omega \in S: \forall \varepsilon > 0 \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\right\}\right) = 1$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1, \forall \varepsilon > 0$$

dan untuk $\forall \varepsilon > 0$ berlaku

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1 \ldots (ii)$$

Karena $n \geq k$ dan $k \to \infty$ maka $n \to \infty$ sehingga persamaan $(ii)$ menjadi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1, \forall \varepsilon > 0. \blacksquare$$

2. Misalkan

$$A = \left\{\bigcap_{n=k}^{\infty} \{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}\right\}$$

$$A^c = \left\{\bigcup_{n=k}^{\infty} \{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\right\}$$

Dari bagian (1) diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(A) = 1$. Berdasarkan Teorema 1 berlaku

$$P(A) + P(A^c) = 1 \Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} P(A^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A)) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} P(A) = 1 - 1 = 0$$

diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{\omega \in S: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \forall \varepsilon > 0. \blacksquare$$

**Teorema 2 (Bhat, 1981)**

Jika $X_n$ dan $Y_n$ adalah barisan peubah acak dimana $X_n \xrightarrow{a.s} X$ dan $Y_n \xrightarrow{a.s} Y$ maka :

1. $X_n - X \xrightarrow{a.s} 0$
2. $X_n + Y_n \xrightarrow{a.s} X + Y$
3. $X_n - Y_n \xrightarrow{a.s} X - Y$
4. $aX_n \xrightarrow{a.s} aX$ untuk suatu $a \epsilon \mathbb{R}$
5. $X_n Y_n \xrightarrow{a.s} XY$
6. ${X_n}^2 \xrightarrow{a.s} {X_n}^2$

**Bukti :**

1. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(s) = X(s)\right\}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(s) - X(s) = 0\right\}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(s) - \lim_{n\to\infty} X(s) = 0\right\}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} \left(X_n(s) - X(s)\right) = 0\right\}\right) = 1$$

Diperoleh $P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} \left(X_n(s) - X(s)\right) = 0\right\}\right) = 1$ artinya $X_n - X \xrightarrow{a.s} 0$. $\blacksquare$

2. Misalkan $A = \left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(s) = X(s)\right\}$ dan $B = \left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} Y_n(s) = Y(s)\right\}$
   Karena $X_n \xrightarrow{a.s} X$ dan $Y_n \xrightarrow{a.s} Y$ maka $P(A) = P(B) = 1$ sehingga
   $P(A) + P(A^c) = 1 \to P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 1 = 0 \to P(A^c) = 0$
   $P(B) + P(B^c) = 1 \to P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 1 = 0 \to P(B^c) = 0$
   $P(A \cap B) \; = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c) = 1 - \left(P(A^c) + P(B^c)\right) = 1$
   Didefinisikan barisan $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ dimana $Z_n = X_n + Y_n$ dan
   $$C = \left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} Z_n(s) = Z(s)\right\}$$
   Klaim $A \cap B \subset C$
   Karena $s \in A$ dan $s \in B$ maka $\lim_{n\to\infty} X_n(s) = X(s)$ dan $\lim_{n\to\infty} Y_n(s) = Y(s)$ sehingga berlaku $\lim_{n\to\infty} X_n(s) + Y_n(s) = X(s) + Y(s)$ atau $\lim_{n\to\infty} Z_n(s) = Z(s)$ artinya $s \in C$. Oleh karena itu terbukti bahwa $A \cap B \subset C$.
   Berdasarkan Teorema Kemonotonan Peluang, jika $A \cap B \subset C$ maka berlaku
   $$P(A \cap B) \leq P(C)$$
   Karena
   $$P(A \cap B) \leq P(C) \Leftrightarrow 1 \leq P(C) \leq 1 \Leftrightarrow P(C) = 1$$
   diperoleh
   $$P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} Z_n(s) = Z(s)\right\}\right) = 1$$
   atau
   $$P\left(\left\{s \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(s) + Y_n(s) = X(s) + Y(s)\right\}\right) = 1$$
   sehingga terbukti bahwa $X_n + Y_n \xrightarrow{a.s} X + Y$. ■
   Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bagian $(3) - (6)$

Teorema 2 menyatakan bahwa kekonvergenan hampir pasti tertutup terhadap operasi aritmatika.

**Kekonvergenan dalam Peluang**

**Definisi 4 (Bhat, 1981)**
Barisan peubah acak $(X_n)$ dikatakan konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

Ini berarti, barisan peubah acak $(X_n)$ tidak konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sehingga $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon_0) \neq 0$.

Definisi 4 menyatakan bahwa peristiwa $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ adalah peristiwa yang terjadi ketika $X_n$ tidak konvergen ke $X$ dan dikatakan konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$, jika peluang dari $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$ menuju nol untuk $n \to \infty$. Notasi yang digunakan untuk $X_n$ konvergen dalam peluang ke $X$ adalah $X_n \xrightarrow{p} X$ .

**Contoh 3.** Barisan peubah acak $(X_n)$ konvergen dalam peluang ke 0 dimana $\mathrm{P}(\mathrm{X_n} = 1) = \frac{1}{\mathrm{n}}$ dan $\mathrm{P}(\mathrm{X_n} = 0) = 1 - \frac{1}{\mathrm{n}}$ akan

**Teorema 3 (Bhat, 1981)**
Syarat perlu dan cukup untuk kekonvergenan dalam peluang adalah $\forall\varepsilon > 0$ berlaku $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$.

**Bukti :**
Barisan $X_n$ konvergen dalam peluang ke $X$ jika $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.
Misalkan $A = \{|X_n - X| < \varepsilon\}$ maka $A^c = \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$
Karena $P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(P(A) + P(A^c)\right) = \lim_{n\to\infty} 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A) + \lim_{n\to\infty} P(A^c) = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A\ ) + \lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A\ ) = 1$$

Sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 0$. ■
Teorema 3 menyatakan bahwa peristiwa $\{|X_n - X| < \varepsilon\}$ adalah peristiwa yang terjadi ketika $X_n$ konvergen ke $X$ dan dikatakan konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ jika peluang dari $\{|X_n - X| < \varepsilon\}$ menuju 1 untuk $n \to \infty$.

**Teorema 4 (Bhat, 1981)**
Jika $X_n$ dan $Y_n$ adalah barisan peubah acak dimana $X_n \xrightarrow{p} X$ dan $Y_n \xrightarrow{p} Y$ maka :

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$
2. $X_n - Y_n \xrightarrow{p} X - Y$
3. $aX_n \xrightarrow{p} aX$ untuk suatu $a\epsilon\mathbb{R}$
4. $aX_n + bY_n \xrightarrow{p} aX + bY$ untuk suatu $a, b\epsilon\mathbb{R}$
5. $X_nY_n \xrightarrow{p} XY$
6. $\frac{X_n}{X} \xrightarrow{p} 1$ untuk $X \neq 0$
7. $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{X}$ untuk $X_n, X \neq 0$
8. $\sqrt{X_n} \xrightarrow{p} \sqrt{X}$

**Bukti :**
1. Berdasarkan Ketaksamaan Segitiga maka
$$|X_n + Y_n - (X + Y)| = |(X_n - X) + (Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$$
Karena $(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \varepsilon) \subset \left(|X_n - X)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|Y_n - Y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$
Berdasarkan Teorema Kemonotonan Peluang maka
$$P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq P\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
dan berdasarkan Aksioma Peluang bagian $(i)$ diperoleh
$$0 \leq P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq P\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
Jika semua ruas dilimitkan maka
$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \left(P\left(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \varepsilon) \leq 0 + 0 = 0$$
Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geq \varepsilon) = 0$.
Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{p} X$ dan $Y_n \xrightarrow{p} Y$ maka $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$. ■
Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bagian $(2) - (8)$
3. $\lim_{n\to\infty} P(|aX_n - aX| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|a(X_n - X)| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{|a|} < \varepsilon\right) = 1$
Sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(|aX_n - aX| < \varepsilon) = 1$.
Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{p} X$ maka $aX_n \xrightarrow{p} aX$. ■

Teorema 4 menyatakan bahwa kekonvergenan dalam peluang tertutup terhadap operasi aritmatika.

**Kekonvergenan dalam Distribusi**

**Definisi 5 (Bhat, 1981)**
Misalkan $(X_n, \mathrm{n} \in \mathbb{N})$ merupakan barisan peubah acak yang didefinisikan pada suatu ruang sampel yang sama dengan peubah acak $X$, dimana $X_1, X_2, X_3, \ldots.$ merupakan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik, yang masing-masing memiliki fungsi distribusi $F_1, F_2, F_3, \ldots$ dan peubah acak $X$ yang memiliki fungsi distribusi $F$. Barisan peubah acak $(X_n)$ konvergen dalam distribusi ke peubah acak $X$ jika $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ atau $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$.

Ini berarti, barisan peubah acak $(X_n)$ tidak konvergen dalam distribusi ke peubah acak $X$ jika $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \neq F_X(x)$ atau $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq x) \neq P(X \leq x)$. Notasi yang digunakan untuk $X_n$ konvergen dalam distribusi ke $X$ adalah $X_n \xrightarrow{d} X$.

**Contoh 4.** Barisan peubah acak $X_n$ konvergen dalam distribusi ke $X$, didefinisikan fungsi distribusi dari $X_n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ yaitu $F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ dan $X$ berdistribusi eksponen dengan parameter 1.

**Teorema 5 (Bhat, 1981)**
Jika $X_n$ dan $Y_n$ adalah barisan peubah acak dimana $X_n \xrightarrow{d} X$ dan $Y_n \xrightarrow{d} c$, $c$ suatu konstanta real maka :

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
2. $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X - c$
3. $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
4. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}, c \neq 0$

**Bukti :**

1. $$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_n + Y_n \leq x) &= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} [P(X_n \leq x - Y_n, |Y_n - c| \geq \varepsilon) + P(X_n \leq x - Y_n, |Y_n - c| \\
&\qquad < \varepsilon)] \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, |Y_n - c| \geq \varepsilon) \\
&\qquad + \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, |Y_n - c| < \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, |Y_n - c| < \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, -\varepsilon < Y_n - c < \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, \mathrm{c} - \varepsilon < Y_n < \mathrm{c} + \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, -(\mathrm{c} + \varepsilon) < -Y_n < -(\mathrm{c} - \varepsilon)) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, -\mathrm{c} - \varepsilon < -Y_n < -\mathrm{c} + \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, -\mathrm{c} - \varepsilon + x < -Y_n + x < -\mathrm{c} + \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, x - \mathrm{c} - \varepsilon < x - Y_n < x - \mathrm{c} + \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - Y_n, x - Y_n = x - c) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x - c) \\
&= P(X \leq x - c) \\
&= P(X + c \leq x)
\end{aligned}$$

   Diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n + Y_n \leq x) = P(X + c \leq x)$
   Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{d} X$ dan $Y_n \xrightarrow{d} c$ maka $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$. ■
   Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bagian $(2) - (4)$

Teorema 5 menyatakan bahwa kekonvergenan dalam distribusi tertutup terhadap operasi aritmatika.

**Teorema 6 (Bhat, 1981)**

1. Jika $X_n \overset{a.s}{\rightarrow} c, c\epsilon\mathbb{R}$ maka untuk sembarang fungsi $g(x)$ yang kontinu di $c$, $g(X_n) \overset{a.s}{\rightarrow} g(c)$.
2. Jika $X_n \overset{p}{\rightarrow} c, c\epsilon\mathbb{R}$ maka untuk sembarang fungsi $g(x)$ yang kontinu di $c$, $g(X_n) \overset{p}{\rightarrow} g(c)$.
3. Jika $X_n \overset{d}{\rightarrow} c, c\epsilon\mathbb{R}$ maka untuk sembarang fungsi $g(x)$ yang kontinu di $c$, $g(X_n) \overset{d}{\rightarrow} g(c)$.

**Bukti :**

1. Misalkan $A = \left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = c\right\}$ dan $B = \left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} g\big(X_n(\omega)\big) = g(c)\right\}$
   Karena $g(x)$ kontinu di $c$ maka berlaku $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g\big(X_n(\omega)\big) = g(c)$ sehingga $A \subset B$ dan berlaku $0 \leq P(A) \leq P(B) \leq 1$. Karena $X_n \overset{a.s}{\rightarrow} c$ maka $P(A) = 1$ sehingga diperoleh $P(B) = 1$ atau $P\left(\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} g\big(X_n(\omega)\big) = g(c)\right\}\right) = 1$ artinya $g(X_n)$ konvergen hampir pasti ke $g(c)$. ∎
2. $g(x)$ kontinu di $c$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ berlaku
   $|x - c| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(c)| < \varepsilon$ atau $|g(x) - g(c)| \geq \varepsilon \Rightarrow |x - c| \geq \delta$
   Karena $(|g(x) - g(c)| \geq \varepsilon) \subset (|x - c| \geq \delta)$ maka berdasarkan Aksioma Peluang dan Teorema Kemonotonan Peluang diperoleh
   $$0 \leq P(|g(x) - g(c)| \geq \varepsilon) \leq P(|x - c| \geq \delta)$$
   Selanjutnya substitusikan $X_n$ ke $x$, kemudian dilimitkan untuk $n \to \infty$ maka berlaku
   $$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|g(X_n) - g(c)| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| \geq \delta)$$
   $$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|g(X_n) - g(c)| \geq \varepsilon) \leq 0$$
   Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n) - g(c)| \geq \varepsilon) = 0$ artinya $g(X_n)$ konvergen dalam peluang ke $g(c)$. ∎
3. Menurut Teorema Portmanteau, $X_n \overset{d}{\rightarrow} c \Leftrightarrow E\big(f(X_n)\big) \to E\big(f(c)\big)$ untuk setiap fungsi kontinu terbatas $f$. Jadi untuk membuktikan $g(X_n) \overset{d}{\rightarrow} g(c)$ untuk setiap fungsi $g(X)$ yang kontinu, maka cukup ditunjukkan bahwa $E\left(f\big(g(X_n)\big)\right) \to E\left(f\big(g(c)\big)\right)$ untuk setiap fungsi kontinu terbatas $f$. Perhatikan bahwa $h = f \text{ o } g$ sendiri merupakan fungsi kontinu terbatas. Maka berdasarkan Teorema Portmanteau, $E\big(h(X_n)\big) \to E\big(h(c)\big)$ atau $E\left(f\big(g(X_n)\big)\right)$ $\to E\left(f\big(g(c)\big)\right)$ dan ini berarti $g(X_n) \overset{d}{\rightarrow} g(c)$. ∎

Teorema 6 dikenal sebagai Teorema Pemetaan Kontinu. Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Henry Mann dan Abraham Wald pada tahun 1943 sehingga sering disebut Teorema Mann-Wald dan menyatakan bahwa kekontinuan tetap mempertahankan kekonvergenan pada barisan peubah acak.

**Kekonvergenan dalam Rata-rata**

**Definisi 6 (Bhat, 1981)**

Barisan peubah acak $(X_n)$ dikatakan konvergen dalam rata-rata ke r ke peubah acak $X$ jika $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|\mathrm{X_n} - \mathrm{X}|^{\mathrm{r}}) = 0$.

Ini berarti, barisan peubah acak $(X_n)$ tidak konvergen dalam rata-rata ke r ke peubah acak $X$ jika $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|\mathrm{X_n} - \mathrm{X}|^{\mathrm{r}}) \neq 0$. Notasi yang digunakan untuk $X_n$ konvergen dalam rata-rata ke r ke $X$ adalah $X_n \overset{r}{\rightarrow} X$ dimana $r \geq 1$.

**Contoh 5.** Jika $X_i$ dimana $i\epsilon\mathbb{N}$ adalah peubah acak menyebar bebas dan identik dengan $\mathrm{E(X_i)} = \mu$ dan $\mathrm{Var(X_i)} = \sigma^2$ serta didefinisikan barisan peubah acak $\overline{\mathrm{X}_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, n\epsilon\mathbb{N}$ maka tunjukkan bahwa $\overline{\mathrm{X}_n}$ konvergen dalam rata-rata ke $\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}_n})$.

**Teorema 7.**
Jika $X_n$ dan $Y_n$ adalah barisan peubah acak dimana $X_n \xrightarrow{r} X$ dan $Y_n \xrightarrow{r} Y$ maka :

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{r} X + Y$
2. $X_n - Y_n \xrightarrow{r} X - Y$
3. $aX_n \xrightarrow{r} aX,\ a\epsilon\mathbb{R}$
4. $aX_n + bY_n \xrightarrow{r} aX + bY,\ a, b\epsilon\mathbb{R}$
5. $X_nY_n \xrightarrow{r} XY$
6. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{r} \frac{X}{Y},\ Y_n, Y \neq 0$
7. $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{r} \frac{1}{X},\ X_n, X \neq 0$
8. $\sqrt{X_n} \xrightarrow{r} \sqrt{X}$

**Bukti :**

1. Karena $0 \leq E|X_n + Y_n - (X+Y)|^r \leq E|X_n - X|^r + E|Y_n - Y|^r$ dan jika semua ruas di limitkan maka diperoleh sebagai berikut :
$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} E|X_n + Y_n - (X+Y)|^r \leq \lim_{n\to\infty} (E|X_n - X|^r + E|Y_n - Y|^r)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} E|X_n + Y_n - (X+Y)|^r \leq \lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r + \lim_{n\to\infty} E|Y_n - Y|^r$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} E|X_n + Y_n - (X+Y)|^r \leq 0 + 0$$
Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n\to\infty} E|X_n + Y_n - (X+Y)|^r = 0$ .
Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{r} X$ dan $Y_n \xrightarrow{r} Y$ maka $X_n + Y_n \xrightarrow{r} X + Y$. ■
Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bagian $(2) - (8)$
3. $\lim_{n\to\infty} E|aX_n - aX|^r = \lim_{n\to\infty} E|a(X_n - X)|^r = \lim_{n\to\infty} |a|^r \times \lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^r = |a|^r \times 0 = 0$
Sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} E|aX_n - aX|^r = 0$ .
Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{r} X$ maka $aX_n \xrightarrow{r} aX$. ■

Teorema 7 menyatakan bahwa kekonvergenan dalam rata-rata tertutup terhadap operasi aritmatika.

**Teorema 8.**

1. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_{n_k} \xrightarrow{a.s} X$ dimana $X_{n_k}$adalah barisan bagian dari $X_n$
2. $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_{n_k} \xrightarrow{p} X$, dimana $X_{n_k}$adalah barisan bagian dari $X_n$
3. $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow X_{n_k} \xrightarrow{d} X$, dimana $X_{n_k}$adalah barisan bagian dari $X_n$
4. $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_{n_k} \xrightarrow{r} X$, dimana $X_{n_k}$adalah barisan bagian dari $X_n$

**Bukti :**

1. Ambil sembarang barisan bagian dari $X_n$ misalkan $X_{n_k}$ maka $n_k \geq n$ sehingga akan dibuktikan $X_{n_k} \xrightarrow{a.s} X$.
Misalkan $\lim_{n_k\to\infty} P\left(\bigcup_{n_k=k}^{\infty}\left\{\omega: \left|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = a$. Maka
$$a = \lim_{n_k\to\infty} \sum_{n_k=k}^{\infty} P\left(\left\{\omega: \left|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)\right| \geq \varepsilon\right\}\right)$$
$$= \lim_{n_k\to\infty} (P(\{\omega: |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + P(\{\omega: |X_{k+1}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\})$$
$$+ P(\{\omega: |X_{k+2}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + P(\{\omega: |X_{k+3}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \cdots)$$

$$= \lim_{n_k \to \infty} P(\{\omega: |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \lim_{n_k \to \infty} P(\{\omega: |X_{k+1}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \lim_{n_k \to \infty} P(\{\omega: |X_{k+2}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \cdots$$

Karena $n_k \geq k$ dan $n_k \to \infty$ maka $k \to \infty$ sehingga

$$a = \lim_{k \to \infty} P(\{\omega: |X_k(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \lim_{k \to \infty} P(\{\omega: |X_{k+1}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \lim_{k \to \infty} P(\{\omega: |X_{k+2}(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) + \cdots$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \lim_{i \to \infty} P(\{\omega: |X_i(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\})$$

Jika $X_i \xrightarrow{a.s} X$ maka $X_i \xrightarrow{p} X$ dimana $i \to \infty$. Karena $X_i \xrightarrow{p} X$ maka berlaku

$$\lim_{i \to \infty} P(\{\omega: |X_i(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{n_k \to \infty} P\left(\bigcup_{n_k = k}^{\infty} \left\{\omega: \left|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

Berdasarkan Teorema 1 maka $X_{n_k} \xrightarrow{a.s} X$, $n_k \to \infty$. ■

2. Ambil sembarang barisan bagian dari $X_n$ misalnya $X_{n_k}$ maka $n_k \geq n$.
   Karena $\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ dan $n_k \geq n$ maka berlaku pula

   $$\lim_{n_k \to \infty} P\left(\left|X_{n_k} - X\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

   Berdasarkan Definisi 4 maka terbukti bahwa $X_{n_k} \xrightarrow{p} X$. ■
   Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bagian (3) & (4)

**Hubungan antara Jenis-Jenis Kekonvergenan pada Barisan Peubah Acak**

**Teorema 10 (Bhat, 1981)**

1. $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty$
2. $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X, n \to \infty$
3. $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty$

**Bukti :**

1. Karena $X_n \xrightarrow{a.s} X$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\lim_{n \to \infty} P(\{|X_m - X| < \varepsilon, \forall m \geq n\}) = 1$
   Karena $n \to \infty$ dan $m \geq n$ maka $m \to \infty$ sehingga diperoleh

   $$\lim_{m \to \infty} P(|X_m - X| < \varepsilon) = 1$$

   Lebih umum diperoleh $\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$ artinya $X_n \xrightarrow{p} X$.
   Jadi, terbukti bahwa jika barisan peubah acak $(X_n)$ konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$ maka $(X_n)$ konvergen dalam peluang ke $X$. ■
2. Misalkan $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x)$ adalah fungsi distribusi dari $X_n$ dan $F_X(x) = P(X \leq x)$ adalah fungsi distribusi dari $X$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

   $$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) \\ &= P(X_n \leq x, X \leq x + \varepsilon) + P(X_n \leq x, X > x + \varepsilon) \\ &= P(X_n \leq x, X \leq x + \varepsilon) + P(X_n - x \leq x - X, X > x + \varepsilon) \\ &\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(X_n - x \leq x - X, X > x + \varepsilon) \\ &\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(X_n - x < -\varepsilon) + P(X_n - x > \varepsilon) \\ &= P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - x| > \varepsilon) \\ &= F_X(x + \varepsilon) + P(|X_n - x| > \varepsilon) \end{aligned}$$

   Diperoleh $F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + P(|X_n - x| > \varepsilon) \ldots (i)$
   Dengan cara yang sama diperoleh

   $$F_X(x - \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) + P(|X_n - x| > \varepsilon) \Leftrightarrow F_X(x - \varepsilon) - P(|X_n - x| > \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \ldots (ii)$$

Sehingga dari $(i)$ dan $(ii)$ diperoleh

$$F_X(x-\varepsilon) - P(|X_n - x| > \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + P(|X_n - x| > \varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty}(F_X(x-\varepsilon) - P(|X_n - x| > \varepsilon)) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq \lim_{n\to\infty}(F_X(x+\varepsilon) + P(|X_n - x| > \varepsilon))$$

$$F_X(x-\varepsilon) - 0 \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) + 0$$

$$F_X(x-\varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon)$$

Karena $\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x)$ dan $\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$ maka

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x-\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon\to 0}(\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x+\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow F_X(x) \leq \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x)$$

Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ atau $\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$. Jadi, terbukti bahwa jika barisan peubah acak $(X_n)$ konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ maka $(X_n)$ konvergen dalam distribusi ke $X$. ■

3. Dengan menggunakan Ketaksamaan Markov dan Aksioma Peluang diperoleh

$$0 \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r}$$

Jika semua ruas dilimitkan maka diperoleh sebagai berikut

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r}$$

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r)}{\lim_{n\to\infty} \varepsilon^r}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{0}{\varepsilon^r} = 0$$

Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

Jadi, terbukti bahwa jika barisan peubah acak $(X_n)$ konvergen dalam rata-rata ke r ke suatu peubah acak $X$ maka $(X_n)$ konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$. ■

Teorema 10 bagian (1) menunjukkan bahwa $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$ tetapi belum tentu berlaku sebaliknya yakni $X_n \xrightarrow{p} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{a.s} X$. Berikut ini diberikan contoh bahwa kebalikan nya tidak selalu benar.

**Contoh 6.** Barisan peubah acak yang bebas dan identik $(X_n, n\epsilon\mathbb{N})$ dimana $X_n$ berdistribusi Bernoulli dengan parameter $p = \frac{1}{n}$ konvergen dalam peluang ke 0 tetapi tidak konvergen hampir pasti ke 0.

Kebalikan dari Teorema 10 bagian (1) akan bernilai benar jika terdapat barisan bagian dari $X_n$ yang konvergen hampir pasti ke peubah acak yang sama. Untuk lebih jelasnya perhatikan teorema berikut.

**Teorema 11 (Bhat, 1981)**
Jika barisan peubah acak $X_n$ konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ maka $X_n$ memuat barisan bagian yang konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$.
**Bukti :**
Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2^n} > 0$ distribusig, $n \in \mathbb{N}$. Karena $X_n \xrightarrow{p} X$ maka

$$P\left(|X_n - X| \geq \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} \dots (i)$$

Berdasarkan Ketaksamaan Boole diperoleh

$$P\left(\bigcup_{n_k=k}^{\infty} |X_{n_k} - X| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{n_k=k}^{\infty} P[|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon] \dots (ii)$$

Dari $(i)$ maka $P\left[\left|X_{n_k} - X\right| \geq \frac{1}{2^{n_k}}\right] = \frac{1}{2^{n_k}}$ sehinga pertidaksamaan $(ii)$ menjadi

$$P\left(\bigcup_{n_k=k}^{\infty}\left|X_{n_k} - X\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{n_k=k}^{\infty}\frac{1}{2^{n_k}} = \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots\right) = \frac{2}{2^k}$$

Jika kedua ruas dilimitkan maka

$$\lim_{n_k \to \infty} 0 \leq \lim_{n_k \to \infty} P\left(\bigcup_{n_k=k}^{\infty}\left|X_{n_k} - X\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n_k \to \infty}\left(\frac{2}{2^k}\right)$$

Karena $n_k \geq k$ dan $n_k \longrightarrow \infty$ maka $k \longrightarrow \infty$ sehingga

$$0 \leq \lim_{n_k \to \infty} P\left(\bigcup_{n_k=k}^{\infty}\left|X_{n_k} - X\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{k \to \infty}\left(\frac{2}{2^k}\right) = 0$$

Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n_k \to \infty} P\left(\bigcup_{n_k=k}^{\infty}\left|X_{n_k} - X\right| \geq \varepsilon\right)$ artinya $X_{n_k} \xrightarrow{a.s} X$.

Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{p} X$ maka $(X_n)$ memuat barisan bagian $\left(X_{n_k}\right)$ yang konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$. ■

Teorema 10 bagian (2) menunjukkan bahwa $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ tetapi belum tentu berlaku sebaliknya yakni $X_n \xrightarrow{d} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{p} X$. Berikut ini diberikan contoh bahwa kebalikan nya tidak selalu benar.

**Contoh 7.** Barisan peubah acak $(X_n)$ dengan range dari $X_n = X = [0,1]$ konvergen dalam distribusi ke $X$ tetapi tidak konvergen dalam peluang ke $X$, didefinisikan peubah acak $X$ terdistribusi secara uniform dalam $0 \leq x \leq 1$ dan fungsi distribusi komulatif dari peubah acak $X_n$ yaitu $F_{X_n}(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}, 0 \leq x \leq 1$.

Kebalikan dari Teorema 10 bagian (2) akan bernilai benar jika barisannya konvergen ke suatu konstanta real. Untuk lebih jelasnya perhatikan teorema berikut.

**Teorema 12 (Bhat, 1981)**
Jika barisan peubah acak $(X_n, n\epsilon\mathbb{N})$ konvergen dalam distribusi ke c maka barisan $(X_n, n\epsilon\mathbb{N})$ konvergen dalam peluang ke c dimana c adalah suatu konstanta.
**Bukti:**
Misalkan peubah acak $X_n$ menyebar secara degenerate ke nilai c. Dengan demikian fungsi distribusi dari $X$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F_c(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
P(|X_n - c| > \varepsilon) &= P(\{X_n - c > \varepsilon\} \cup \{X_n - c < -\varepsilon\}) \\
&= P(X_n - c > \varepsilon) + P(X_n - c < -\varepsilon) \\
&= P(X_n > c + \varepsilon) + P(X_n < c - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X_n \leq c + \varepsilon) + P(X_n < c - \varepsilon) \\
&\leq 1 - P(X_n \leq c + \varepsilon) + P(X_n \leq c - \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) &\leq \lim_{n\to\infty}\left(1 - P(X_n \leq c + \varepsilon) + P(X_n \leq c - \varepsilon)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq c + \varepsilon) + \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq c - \varepsilon) \\
&= 1 - P(X \leq c + \varepsilon) + P(X \leq c - \varepsilon) \\
&= 1 - F_c(c + \varepsilon) + F_c(c - \varepsilon) \\
&= 1 - F_c(c + \varepsilon \geq 0) + F_c(c - \varepsilon < 0) \\
&= 1 - 1 + 0
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0$

Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \xrightarrow{d} c$ maka $X_n \xrightarrow{p} c$. ■

Teorema 10 bagian (3) menunjukkan bahwa $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$ tetapi tidak berlaku sebaliknya yakni $X_n \xrightarrow{p} X \nRightarrow X_n \xrightarrow{r} X$. Berikut ini diberikan contoh bahwa kebalikan nya tidak selalu benar.

**Contoh 8.** Barisan peubah acak $(X_n, n = 1,2,3, \ldots)$ konvergen dalam peluang ke 0 tetapi $X_n$ tidak konvergen dalam rata-rata ke r ke 0 dimana

$$X_n = \begin{cases} n^r, & \text{dengan peluang } \dfrac{1}{n^{r-1}} \\ 0, & \text{dengan peluang } 1 - \dfrac{1}{n^{r-1}} \end{cases}, \text{untuk } r \geq 1$$

Kebalikan dari Teorema 10 bagian (3) akan bernilai benar jika $X_n$ terbatas dalam peluang. Untuk lebih jelasnya perhatikan teorema berikut.

**Teorema 13 (Bhat, 1981)**
Jika barisan peubah acak $(X_n, n \in \mathbb{N})$ terbatas dalam peluang dan barisan $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ maka barisan $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergen dalam rata-rata ke $X$.
**Bukti :**
Berdasarkan Ketaksamaan Markov maka

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|X_n - X|^r > \varepsilon^r) \leq \frac{E(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r}$$

Jika kedua ruas dilimitkan maka

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r} = \frac{\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r)}{\lim_{n\to\infty} \varepsilon^r} = \frac{\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r}$$

Karena $X_n \xrightarrow{p} X$ maka $0 \leq \frac{\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r)}{\varepsilon^r} \leq \lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r)$

Karena $X_n$ terbatas dalam peluang maka $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^r) = 0$

Berdasarkan Definisi 6 maka terbukti bahwa $X_n \xrightarrow{r} X$. ■

**Penerapan Teori Kekonvergenan Barisan Peubah Acak**

Berdasarkan jenis kekonvergenannya, terdapat dua jenis hukum bilangan besar yaitu hukum bilangan besar kuat dan hukum bilangan besar lemah.

**Teorema 15 (Sungkono, 2013)**
Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ barisan peubah acak yang terdistribusi secara identik dan independen dengan $E(X) = \mu < \infty$ maka $\overline{X_n}$ konvergen hampir pasti ke $\mu$.
**Bukti :**

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\right) = \sum_{n=k}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) \ldots (i)$$

Menurut Ketaksamaan Chebyshev untuk distribusig $\varepsilon > 0$ diperoleh

$$\mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$$

Sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

maka persamaan $(i)$ menjadi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\right) = \sum_{n=k}^{\infty} 0 = 0$$

Sehingga berdasarkan Teorema 1 terbukti bahwa $\overline{X_n}$ konvergen hampir pasti ke μ. ■

**Teorema 16 (Sungkono, 2013)**
Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ barisan peubah acak yang terdistribusi secara identik dan independen dengan $E(X) = \mu < \infty$ maka $\overline{X_n}$ konvergen dalam peluang ke $\mu$.
**Bukti :**
Dengan menggunakan Ketaksamaan Chebyshev maka

$$\mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Berdasarkan Aksioma Peluang bagian $(i)$ diperoleh $0 \leq \mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ dan jika semua ruas dilimitkan maka

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) \leq 0$$

Berdasarkan Teorema Jepit diperoleh $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) = 0$. Jadi, terbukti bahwa $\overline{X_n} \xrightarrow{p} \mu$. ■

Teorema 15 dikenal dengan nama Hukum Bilangan Besar Kuat dan Teorema 16 dikenal dengan nama Hukum Bilangan Besar Lemah dimana kedua teorema tersebut menyatakan bahwa suatu sampel yang saling berdistribusi bebas dan idetik, dengan rata-rata sampel $(\overline{X_n})$ akan konvergen ke nilai harapannya $(\mu)$.

**Teorema 17 (Bhat, 1981)**
Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ barisan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan $E(X_i) = \mu$ dan $Var(X_i) = \sigma^2, i = 1,2,3, \dots$ berlaku $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z$ dimana $Z$ berdistribusi normal baku.
**Bukti :**
Misalkan $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ maka $E(Y_i) = 0, Var(Y_i) = 1$, dan $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i$
Misalkan $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ maka $Z_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$ sehingga fungsi pembangkit momen dari $Z_n$ adalah

$$M_{Z_n}(t) = \left(M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Jika kedua ruas dilimitkan maka $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\left(n \times ln\left(M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)} \dots (i)$

Misalkan $y = \frac{1}{\sqrt{n}} \to n = \frac{1}{y^2}$ maka $\lim_{n\to\infty} \left(n \times ln\left(M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) = \frac{t^2}{2} \dots (ii)$

Substitusi persamaan $(ii)$ ke persamaan $(i)$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{\lim_{n\to\infty}\left(n \times ln\left(M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)} = e^{\frac{t^2}{2}} = M_Z(t)$$

Diperoleh $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$ maka terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$ yang artinya $Z_n$ konvergen dalam distribusi ke $Z$. ■

Teorema 17 dikenal dengan nama Teorema Limit Pusat yang menyatakan jika suatu barisan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi identik dengan distribusi normal, maka untuk $n$

yang sangat besar distribusi dari barisan peubah acak tersebut akan mendekati distribusi normal baku.
Sebagai terapan yang lain dari kekonvergenan dalam distribusi, diberikan beberapa teorema yang menyatakan bahwa suatu distribusi dapat didekati dengan distribusi yang lain. Untuk lebih jelasnya, perhatikan teorema berikut.

**Teorema 18 (Bhat, 1981)**
Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ barisan peubah acak yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi binomial atau biasa ditulis dengan $X_n \sim Bin(n,p)$ maka $X_n$ akan konvergen dalam distribusi ke $X$ dimana $X$ berdistribusi poisson atau biasa ditulis dengan $X \sim Poi(\lambda)$.
**Bukti :**
Karena $X_n \sim Bin(n,p) \Rightarrow P(X_n \le x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
dan $X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ maka

$$P(X_n \le x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{x} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i!} p^i (1-p)^{n-i} \dots (*)$$

Misalkan $\lambda = np$ maka $p = \frac{\lambda}{n}$ maka persamaan $(i)$ menjadi

$$P(X_n \le x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{x} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{(i-1)}{n}\right)\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

Sehingga jika $P(X_n \le x)$ dikenakan limit

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{x} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{(i-1)}{n}\right)\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{x}\left(\frac{\lambda^i}{i!} \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^n\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$$

$$= P(X \le x)$$

Diperoleh $\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = P(X \le x)$.
Jadi, terbukti bahwa jika $X_n \sim Bin(n,p)$ maka $X_n$ akan konvergen dalam distribusi ke $X$ dimana $X \sim Poi(\lambda)$. ■

Teorema 18 menyatakan bahwa peubah acak binomial dengan parameter $n$ dan $p$ akan konvergen dalam distribusi ke peubah acak poisson dengan parameter $\lambda = np$.

**Teorema 19.**
Misalkan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ barisan peubah acak yang saling bebas dan masing-masing berdistribusi normal, jika $\bar{X}_n$ dan ${S_n}^2$ saling bebas, $T_{n-1} = \dfrac{\frac{\bar{X}_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)\,{S_n}^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}}$ berdistribusi t-student dengan $n-1$ derajat bebas maka $T_{n-1}$ konvergen dalam distribusi ke $Z$ dimana $Z$ berdistribusi normal baku.

**Bukti :**
Berdasarkan definisi dari distribusi t-student maka $T_{n-1}$ berdistribusi t-student. Misalkan $T_{n-1} = \frac{Z_n}{Y_n}$ dengan $Z_n = \frac{\bar{X}_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ dan $Y_n = \sqrt{\frac{{S_n}^2}{\sigma^2}}$. Berdasarkan Teorema Limit Pusat maka $Z_n \xrightarrow{d} Z$, karena ${S_n}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$ dan berdasarkan Teorema 4 maka $Y_n \xrightarrow{p} 1$ sehingga jika $Z_n \xrightarrow{d} Z$ dan $Y_n \xrightarrow{p} 1$ maka berdasarkan Teorema 5 diperoleh $\frac{Z_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{Z}{1}$ oleh karena itu terbukti bahwa $T_{n-1} \xrightarrow{d} Z$ dimana $Z \sim N(0,1)$. ■
Teorema 19 menyatakan bahwa untuk derajat kebebasan yang makin besar, distribusi t-student dapat mendekati distribusi normal baku.

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Kekonvergenan pada barisan peubah acak di ruang peluang minimal terdiri dari empat jenis yaitu kekonvergenan hampir pasti, kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi dan kekonvergenan dalam rata-rata.
   i. Barisan peubah acak $(X_n, n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen hampir pasti atau konvergen dengan peluang satu ke peubah acak $X$ jika
   $$P\left(\left\{\omega \in S: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$
   ii. Barisan peubah acak $(X_n, n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku
   $$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$
   iii. Barisan peubah acak $(X_n, n \in \mathbb{N})$ dengan fungsi distribusi $F_{X_n}(x)$ dikatakan konvergen dalam distribusi ke peubah acak $X$ dengan fungsi distribusi $F_X(x)$ jika
   $$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$
   iv. Barisan peubah acak $(X_n, n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen dalam rata-rata ke peubah acak $X$ jika untuk $r \geq 1$ berlaku
   $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|\mathrm{X_n} - \mathrm{X}|^{\mathrm{r}}) = 0$$
2. Beberapa sifat kekonvergenan pada barisan peubah acak adalah :
   i. Keempat jenis kekonvergenan pada barisan peubah acak bersifat tertutup terhadap operasi aritmatika.
   ii. Kekonvergenan pada barisan peubah acak mempertahankan kekonvergenannya di fungsi kontinunya.
   iii. Jika barisan peubah acak $X_n$ konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$ maka setiap barisan bagian dari $X_n$ akan konvergen hampir pasti ke $X$. Hal ini juga berlaku untuk kekonvergenan dalam peluang, kekonvergenan dalam distribusi dan kekonvergenan dalam rata-rata.
3. Hubungan antara empat jenis kekonvergenan pada barisan peubah acak yaitu:
   i. Jika barisan peubah acak $X_n$ konvergen hampir pasti ke peubah acak $X$ maka $X_n$ konvergen dalam peluang ke $X$. Akan berlaku sebaliknya, jika barisan $X_n$ yang konvergen dalam peluang, memuat barisan bagian yang konvergen hampir pasti ke $X$.
   ii. Jika barisan peubah acak $X_n$ konvergen dalam peluang ke peubah acak $X$ maka $X_n$ konvergen dalam distribusi ke $X$. Akan berlaku sebaliknya, jika limitnya merupakan suatu konstanta real.
   iii. Jika barisan peubah acak $X_n$ konvergen dalam rata-rata ke peubah acak $X$ maka $X_n$ konvergen dalam peluang ke $X$. Akan berlaku sebaliknya, jika barisan $X_n$ terbatas dalam peluang.
   iv. Untuk kekonvergenan hampir pasti dan kekonvergenan dalam rata-rata, keduanya tidak saling berhubungan.

4. Teori kekonvergenan pada barisan peubah acak dapat digunakan dalam pembuktian Hukum Bilangan Besar (Lemah dan Kuat), Teorema Limit Pusat, dan limit distribusi. Konsep kekonvergenan hampir pasti dapat digunakan dalam membuktikan Hukum Bilangan Besar Kuat. Konsep kekonvergenan dalam peluang dan kekonvergenan dalam rata-rata dapat digunakan dalam membuktikan Hukum Bilangan Besar Lemah, dalam pembuktiannya juga menggunakan Ketaksamaan Markov dan Ketaksamaan Chebyshev. Konsep kekonvergenan dalam distribusi dapat digunakan dalam membuktikan Teorema Limit Pusat dan beberapa kegunaan lainnya seperti dapat digunakan untuk mendekati suatu distribusi dengan suatu distribusi yang lain.

## SARAN

Penelitian ini membahas mengenai empat jenis kekonvergenan pada barisan peubah acak di ruang Riil berupa definisi, contoh, sifat, hubungan dan terapannya sehingga penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengkaji lebih lanjut mengenai sifat-sifat yang lain dan topik-topik lanjutan di ruang yang sama maupun di ruang yang lain.

## DAFTAR PUSTAKA

Agusta, V., Putri, N., & Syahrul, M. S. (2019). Keterkaitan Antara Konvergen Almost Surely, Konvergen dalam Probabilitas, Konvergen dalam Mean, dan Konvergen dalam Distribusi. *Journal Mathematics and Aplications*.

Bhat, B. R. (1981). *Modern Probability Theory* (M. S. Sejwal (ed.)). Wiley Eastern Limited.

Hernadi, J. (2015). *Analisis Real Elementer dengan Ilustrasi Grafis dan Numeris* (L. Simarmata (ed.)). Penerbit Erlangga.

Papoulis, A. (1984). Probability, Random Variables, and Stochastics Processes (2nd ed.). McGraw-Hill.

Sungkono, J. (2013). Kekuatan Konvergensi Dalam Probabilitas dan Konvergensi Almost Surely. *Jurnal Pendidikan Matematika FKIP UNWiDHA Klaten*.

Tinungki, G. M. (2018). Ketidaksamaan Chebyshev Hukum Bilangan Besar pada Bisnis Asuransi. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *5*(2), 86–92.