Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 58 – 65)
Vol. 5. No. 1, April 2022
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Solusi Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Transformasi Laplace dan Transformasi Elzaki

Ahmad Zaki[1, a)], Rahmat Syam [1, b)], dan Kristina Lubis[, c)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar*

[a)] ahmadzaki@unm.ac.id
[b)] rahmatsyam@unm.ac.id
[c)] kristinalubis15april@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui solusi persamaan panas dimensi satu menggunakan transformasi Laplace dan transformasi Elzaki. Penelitian ini berupa penelitian murni yang mengkaji tentang transformasi Laplace dan transformasi Elzaki pada persamaan panas dimensi satu. Bentuk umum persamaan panas dimensi satu yaitu* $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. *Penyelesaian persamaan panas dimensi satu dengan metode transformasi Laplace dan transformasi Elzaki dilakukan dengan cara membangun dan menganalisis persamaan panas dimensi satu sehingga terbentuk persamaan umumnya, kemudian substitusikan nilai awal* $u(x,0) = f(x)$. *Selanjutnya cari solusi penyelesaian menggunakan transformasi Laplace dan ransformasi Elzaki, kemudian solusi tersebut disimulasikan menggunakan software Maple. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa diperoleh solusi dari persamaan panas dimensi satu dengan metode transformasi Elzaki yaitu* $u(x,t) = f^2(x)E^{-1}\left[\frac{v^2}{f(x)-vk\frac{d^2f(x)}{dx^2}}\right]$ *dan transformasi Laplace* $u(x,t) = f^2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Sf(x)-k\frac{d^2f(x)}{dx^2}}\right]$

Kata kunci : *Persamaan panas dimensi satu, Transformasi laplace, Transformasi elzaki*

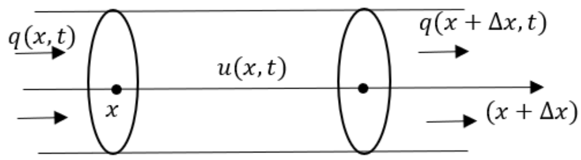
Abstract. *This study aims to determine the solution to the one dimensional heat equation using the Laplace transformation and Elzaki transformation. This research is a pure research that examines the Laplace transformation and Elzaki transformation in the one dimensional heat equation. The general form of the one dimensional heat equation is* $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. *The solution of the one dimensional heat equation using the Elzaki transformation method is done by constructing and analyzing the one dimensional heat equation to form a general equation, the substitusing the initial value of* $u(x,0) = f(x)$. *Next, find a solution using the Laplace transform and Elzaki transform, then the solution is simulated using Maple software. The results of this study indicate that the solution of the one dimensional heat equation using the Elzaki transform method is* $u(x,t) = f^2(x)E^{-1}\left[\frac{v^2}{f(x)-vk\frac{d^2f(x)}{dx^2}}\right]$ *and Laplace transformation* $u(x,t) = f^2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Sf(x)-k\frac{d^2f(x)}{dx^2}}\right]$

Key words : *one dimentional heat equation, Laplace transform, Elzaki transform*

PENDAHULUAN

Matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang memegang peranan penting dalam kajian ilmu di berbagai bidang keilmuan (Sair, 2018). Salah satu ilmu matematika yang mempunyai peranan penting dengan ilmu pengetahuan lainnya adalah persamaan differensial (Ayubi., Aziz., & Ansori, 2017). Persamaan differensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan suatu fungsi atau memuat suku – suku dari fungsi tersebut dan turunannya (Ibnas, Hasyim, & Ridwan, 2020). Persamaan differensial menurut peubah bebasnya, dibagi menjadi dua, yaitu Persamaan Differensial Biasa (PDB) dan Persamaan Differensial Parsial (PDP). Persamaan differensial sering digunakan sebagai model matematika dalam bidang sains maupun dalam bidang rekayasa (Kusuma & Abdillah, 2010). Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan konsep persamaan differensial adalah perpindahan panas (Holman, 2010).

Perhatikan masalah distribusi panas suatu batang penghantar yang panjangnya L dengan massa jenis konstan ρ. Permukaan lateral dari batang penghantar terisolasi, sehingga tidak ada panas yang keluar di seluruh permukaan ini (gambar 1).



GAMBAR 1. Ilustrasi aliran panas dalam ruang (O'neil, 2014)

Didefenisikan $u(x,t)$ adalah suhu pada titik *x* dan waktu *t* dalam batang tersebut. Elemen batang dengan batas kiri x dan batas kanan x + Δx. Jumlah energi panas yang dibutuhkan dinyatakan dengan satuan unit massa suatu benda dimisalkan c adalah konstanta panas spesifik pada material batang. Jika suhunya dinaikkan dari 0 ke $u(x,t)$, maka energi yang diperlukan sebanyak $\rho c u(x,t)\,\Delta x$. Jadi total energi yang dibutuhkan yaitu

$$E(x,\Delta x,t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho c u(z,t)\partial z \qquad (1)$$

Jumlah energi panas dalam ruas pada waktu t dapat meningkat dengan dua cara: energi panas mengalir ke dalam segmen sampai ujung batang (hal ini mengubah fluks dari energi) dan atau ada sumber energi panas lain dalam ruas batang (Sinopa, Noviani, & Rizki 2020). Untuk saat ini tidak ada sumber atau energi yang hilang dari batang, maka persamaan (1) dimisalkan dengan persamaan (2)

$$\text{Fluks} = \int_x^{x+\Delta x} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(z,t)\partial z \qquad (2)$$

misalkan $q(x,t)$ adalah jumlah dari energi panas per-satuan daerah yang mengalir melintasi penampang melintang *x* dan *t*, ke arah *x* yang meningkat. Sehingga fluks dari energi ke dalam ruas antara *x* dan $x+\Delta x$ pada waktu *t* adalah tingkat aliran ke dalam ruas melintasi daerah pada *x*, dikurangi tingkat dari aliran keluar ruas melintasi daerah pada $x+\Delta x$ sehingga diperoleh persamaan (3) dan (4)

$$\text{Fluks} = q(x,t) - q(x+\Delta x,t) \qquad (3)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\text{Fluks} = -\big(q(x+\Delta x,t) - q(x,t)\big) \qquad (4)$$

Persamaan konduksi panas sederhana dikarakteristikan oleh hukum dibawah ini:

a. Panas mengalir dari tempat yang lebih panas ke tempat yang lebih dingin.
b. Energi berbanding lurus dengan laju perubahan suhu persatuam Panjang (Hukum Fourier pada penghantar panas) (Sulpiani & Widowati, 2013).

Hal ini berarti $q\left((x,t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$

berdasarkan fakta bahwa tanda negatif pada persamaan ini berarti energi mengalir dari ruas yang lebih panas ke ruas yang lebih dingin. Substitusikan $q(x,t)$ ke dalam persamaan (4) untuk memperoleh

$$\text{Fluks} = -\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) + k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

Tulis persamaan diatas sebagai

$$\text{Fluks} = \int_{x}^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}(z,t)\right)\partial \mathrm{z} \tag{5}$$

Dari persamaan (2) dan (3) untuk fluks, diperoleh

$$\int_{x}^{x+\Delta x}\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\partial z = \int_{x}^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}(z,t)\right)\partial z \tag{6}$$

Ruas kanan pindah ke ruas kiri, sehingga diperoleh

$$\int_{x}^{x+\Delta x}\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(z,t)\partial z - \int_{x}^{x+\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}(z,t)\right)\partial z = 0 \tag{7}$$

Sehingga,

$$\int_{x}^{x+\Delta x}\left[\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(z,t)\partial z - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}(z,t)\right)\right]\partial z = 0$$

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{pc}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{9}$$

Persamaan (8) adalah persamaan panas dimensi satu dengan kondisi awal persamaan (9). Metode transformasi Laplace dan transformasi Elzaki merupakan salah satu metode analitik yang digunakan dalam persamaan differensial parsial. Metode transformasi Laplace dan transformasi Elzaki yang digunakan pada penelitian ini terdiri dari beberapa Langkah, yaitu menentukan bentuk persamaan panas dimensi satu dan kondisi awal persamaan, menentukan solusi $u(x,t)$ dengan cara mentransformasikan persamaan panas dimensi satu, substitusikan nilai awal, menentukan nilai $T(v)$ menggunakan transformasi Elzaki, menentukan nilai $u(x,s)$

menggunakan transformasi Laplace kemudian mencari invers sehingga diperoleh solusi persamaan differensial parsial.

Beberapa peneliti telah mengkaji tentang penerapan metode transformasi Laplace dan transformasi Elzaki seperti yang telah dilakukan oleh Nova Minarti, Mariatul Kiftiah, dan Helmi (2015) meneliti tentang Penyelesaian persamaan differensial parsial linear dengan menggunakan metode transformasi elzaki, Maharani (2017) meneliti tentang Aplikasi Transformasi Laplace pada Persamaan Differensial Orde Dua untuk Pendulum Sederhana dan Pendulum Fisis, Arie Wijaya, Yuni Yulida, dan Faisal (2015) meneliti tentang hubungan antara transformasi Laplace dengan transformasi Elzaki secara khusus pada persamaan differensial biasa. Persamaan dari ketiga penelitian sebelumnya dengan penelitian ini adalah penggunakan metode transformasi laplace dan transformasi elzaki, sedangkan perbedaannya terletak pada persamaan yang digunakan yaitu persamaan panas dimensi satu. Pada artikel ini akan membahas solusi persamaan panas dimensi satu dengan metode transformasi laplace dan transformasi elzaki.

HASIL DAN SIMULASI

Hasil

Langkah-langkah penyelesaian persamaan panas dimensi satu dengan metode transformasi Laplace dan transformasi Elzaki yaitu diselesaikan dengan persamaan (8) dan persamaan (9) kondisi awal persamaan panas dimensi satu.

(i) Menggunakan transformasi Laplace
1. Mentransformasikan persamaan (8) berdasarkan sifat-sifat transformasi Laplace sehingga deperoleh $Su(x,s) - u(x,0) = k\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x^2}$
2. Substitusikan nilai awal, maka $Su(x,s) - f(x) = k\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x^2}$
3. Menentukan nilai $u(x,s)$ diperoleh $u(x,s) = \frac{f^2(x)}{S.f(x) - k\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}$
4. Menggunakan invers transformasi Laplace sehingga diperoleh solusinya yaitu $u(x,t) = f^2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Sf(x) - k\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}\right]$

(ii) Menggunakan transformasi Elzaki
1. Mentransformasikan persamaan (8) berdasarkan sifat-sifat transformasi Elzaki sehingga deperoleh $\frac{T(v)}{v} - vu(x,0) = k\frac{\partial^2 T(v)}{\partial x^2}$
2. Substitusikan nilai awal, maka $T(v) - v^2 f(x) = vk\frac{\partial^2 T(v)}{\partial x^2}$
3. Menentukan nilai $T(v)$ diperoleh $T(v) = \frac{v^2 f^2(x)}{f(x) - vk\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}$
4. Menggunakan invers transformasi Elzaki sehingga diperoleh solusinya yaitu $u(x,t) = f^2(x)E^{-1}\left[\frac{v^2}{f(x) - vk\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}\right]$

Simulasi

Persamaan panas dimensi satu yang diselesaikan dengan transformasi Elzaki dan transformasi Laplace menggunakan persamaan umum yang diperoleh sebelumnya dengan nilai awal $f(x) = 6e^{-3x}$ dan k = 2

a) Transformasi Laplace

Berdasarkan solusi yang diperoleh sebelumnya solusi dari persamaan panas dimensi satu menggunakan transformasi Laplace adalah

$$u(x,t) = f^2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Sf(x) - k\frac{d^2f(x)}{dx^2}}\right]$$

Sehingga solusi untuk persamaan panas dimensi satu dengan k=2 dan nilai awal

$f(x) \quad = 6e^{-3x}$ adalah

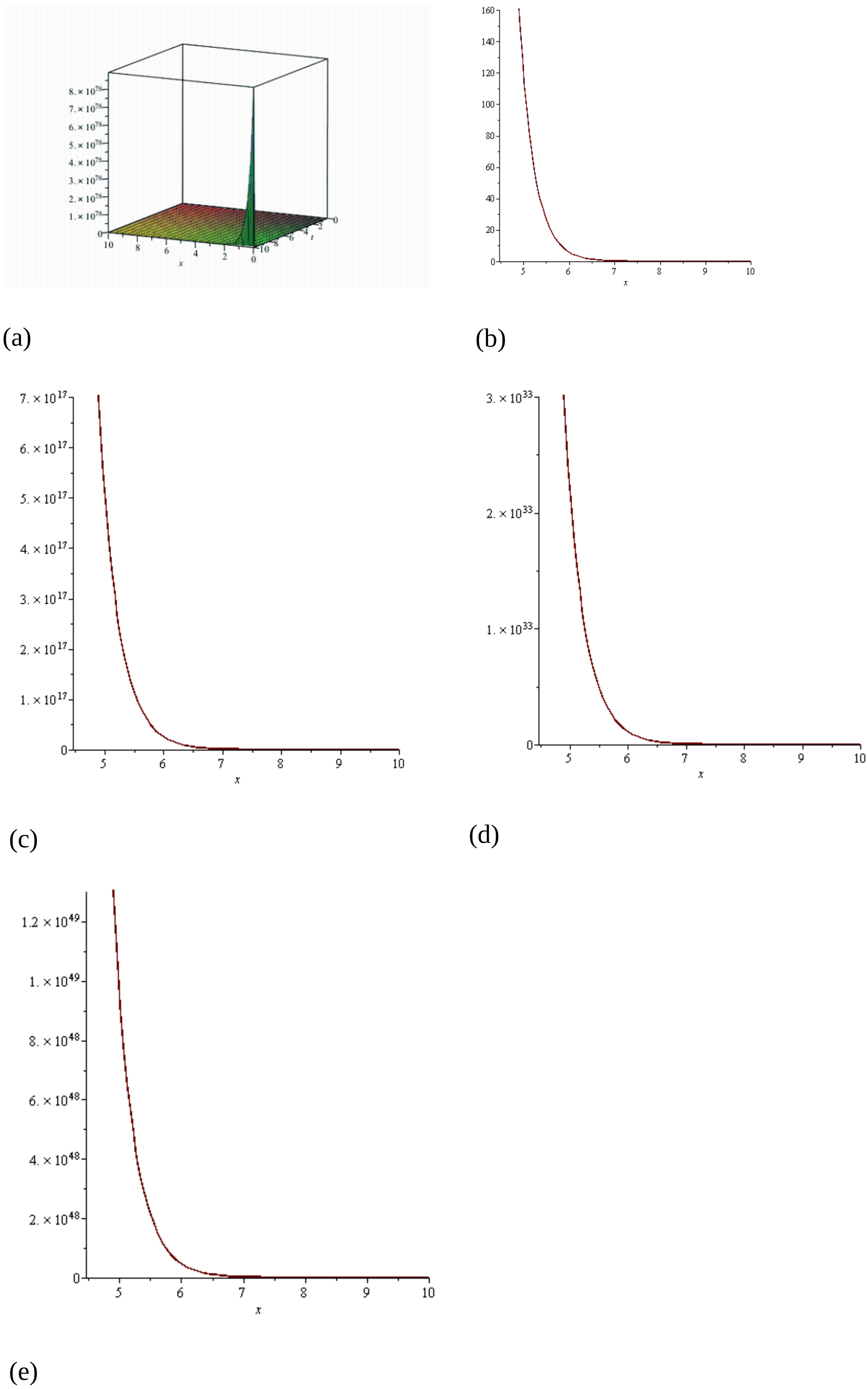
$$\begin{aligned}
u(x,t) &= (6e^{-3x})^2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S6e^{-3x} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(6e^{-3x})}\right]\\
&= 36e^{-6x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S6e^{-3x} - 2\frac{\partial}{\partial x}(-18e^{-3x})}\right]\\
&= 36e^{-6x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S6e^{-3x} - 2(54e^{-3x})}\right]\\
&= 36e^{-6x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S6e^{-3x} - 108e^{-3x}}\right]\\
&= 36e^{-6x}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6e^{-3x}(S-18)}\right]\\
&= \frac{36e^{-6x}}{6e^{-3x}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S-18)}\right]\\
&= 6e^{-3x}.e^{18t}\\
&= 6e^{-3x+18t}
\end{aligned}$$

b) Transformasi Elzaki

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f^2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Sf(x) - k\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}}\right]\\
u(x,t) &= (6e^{-3x})^2E^{-1}\left[\frac{v^2}{6e^{-3x} - 2v\frac{\partial^2}{\partial x^2}(6e^{-3x})}\right]\\
&= 36e^{-6x}E^{-1}\left[\frac{v^2}{6e^{-3x} - 2v\frac{\partial}{\partial x}(-18e^{-3x})}\right]\\
&= 36e^{-6x}E^{-1}\left[\frac{v^2}{6e^{-3x} - 2v\frac{\partial}{\partial x}(54e^{-3x})}\right]\\
&= 36e^{-6x}E^{-1}\left[\frac{v^2}{6e^{-3x}(1-18v)}\right]\\
&= \frac{36e^{-6x}}{6e^{-3x}}E^{-1}\left[\frac{v^2}{(1-18v)}\right]\\
&= 6e^{-3x}.e^{18t}\\
&= 6e^{-3x+18t}
\end{aligned}$$

Berdasarkan simulasi persamaan panas dimensi satu yang diselesaikan dengan menggunakan metode transformasi Laplace dan transformasi Elzaki dengan k=2 dan nilai awal $f(x) = 6e^{-3x}$, diperoleh $u(x,t) = 6e^{-3x+18t}$.

Dengan menggunakan aplikasi, diperoleh grafik 3D dan 2D dari solusi persamaan panas dimensi satu tersebut dengan $0 \leq x \leq 10$ dan $0 \leq t \leq 10$



GAMBAR 2. Perpindahan panas

Gambar (a) sampai dengan (e) menunjukkan hasil simulasi persamaan panas dimensi satu pada grafis 3D dan grafik 2D terhadap jarak (x), waktu (t), dan perpindahan panas $u(x,t)$ pada persamaan $u(x,t) = 6e^{-3x+18t}$. grafis pada gambar (a) menunjukkan perpindahan panas pada $0 \leq x \leq 10$ di sepanjang $0 \leq t \leq 10$ sedangkan, Grafik pada gambar (b) sampai dengan (e) masing – masing menunjukkan pergerakan nilai perpindahan panas dalam saluran transmisi pada waktu $t = 1, t = 3, t = 5, t = 7$. Berdasarkan grafis dan grafik pada gambar (b) sampai dengan gambar (e), perpindahan panas mengalami penurunan secara eksponensial di sepanjang x namun nilai perpindahan panas ini akan meningkat menjauhi nol seiring dengan berjalannya waktu atau bertambahnya nilai t.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa :

1. Membangun dan menganalisis persamaan panas dimensi satu, dilakukan dengan pengamatan pada sebuah batang penghantar yang panjangnya L, dengan massa jenis konstan ρ, yang diasumsikan bahwa tidak ada sumber atau energi yang hilang dari batang maka Fluks $= \int_x^{x+\Delta x} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(z,t)dz$, dimisalkan $q(x,t)$ adalah jumlah energi panas per satuan daerah yang mengalir melintassi penampang x dan t sehingga diperoleh Fluks $= -\big(q(x+\Delta x, t) - q(x,t)\big)$. Fakta bahwa panas mengalir dari ruas yang lebih panas ke ruas yang lebih dingin maka persamaannya menjadi
   $$\int_x^{x+\Delta x} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(z,t)dz - \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}(z,t)\right) dz = 0$$
   dari Pengembangan model matematikanya terbentuklah persamaan panas dimensi satu yaitu $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
2. Solusi umum persamaan panas dimensi satu menggunakan metode transformasi Laplace adalah $u(x,t) = f^2(x)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Sf(x) - k\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}\right]$ sedangkan Solusi umum persamaan panas dimensi satu menggunakan metode transformasi Elzaki adalah $u(x,t) = f^2(x)E^{-1}\left[\frac{v^2}{f(x) - vk\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}\right]$.
3. Perubahan grafik akan terjadi seiring bertambahnya nilai t dan dipengaruhi juga oleh besar kecilnya nilai k.

DAFTAR PUSTAKA

Sair, I. S. (2018). *Solusi Numerik Model Penyebaran pada Penyakit Hepatitis B di Provinsi Sulawesi Selatan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat* (Skripsi). Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Ayubi, F., Aziz, D., & Ansori, M. (2017). Menyelesaikan Persamaan Differensial Linear Orde-n Non Homogen dengan Fungsi Green. *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitaif 2017*.

Ibnas, R., Hasyim, P. R., & Ridwan, M. (2020). Solusi Persamaan Differensial pada Sistem Bejana dengan Menggunakan Metode Transformasi Laplace. *Jurnal Teknosains*, *14*(1). 53–60.

Kusuma, J., & Abdillah. (2010). Solusi Numerik Persamaan Differensial Biasa dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Lima. *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi*, *7*(1). 49–55.

Holman, J. P. (2010). Heat Transfer (10thed). New York: The McGraw-Hill Companies.

O'neil, P.V. (2014). Beginning Partial Differential Equations. New Jersey: Jhin Wiley & Sons, inc.

Sinopa, L.C.K, Noviani, E & Rizki, S.W. (2020). Hampiran solusi persamaan panas dimensi satu dengan metode beda hingga crank-nicolson. *Buletin Ilmiah Mat.Sat. dan Terapannya. 09(01)*, hal 195-204.

Sulpiani, R. & Widowati. (2013). Solusi numerik persamaan difusi dengan menggunakan metode beda hingga. *Jurnal sains dan matematika*. 21(3).