Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 40 – 47)
Vol. 5. No. 1, April 2022
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Solusi Persamaan Adveksi-Difusi dengan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Muhammad Abdy[1,a)], Maya Sari Wahyuni[1,b)], dan Narisa Fahira Awaliyah[1, c)]

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224

[a)] m.abdy@unm.ac.id
[a)] maya.sari.w@unm.ac.id
[c)] narisafahira@gmail.com

***Abstrak**. Artikel ini membahas tentang solusi dari persamaan adveksi-difusi. Persamaan adveksi-difusi merupakan persamaan matematis yang didesain untuk mempelajari fenomena transpor polutan. Pada artikel ini, metode yang digunakan untuk menentukan solusi persamaan adveksi-difusi yaitu metode dekomposisi Adomian-Laplace. Metode dekomposisi Adomian Laplace adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang mengkombinasikan metode transformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Solusi persamaan adveksi-difusi diperoleh dengan menerapkan tranformasi laplace pada persamaan adveksi-difusi, mensubtitusi syarat awal, menyatakan solusi dalam bentuk deret tak hingga, menentukan suku-sukunya, dan menerapkan invers transformasi Laplace pada suku-suku dari deret tak hingga tersebut. Hasil dari tulisan ini adalah solusi persamaan adveksi-difusi dapat diperoleh dengan metode dekomposisi Adomian Laplace.*
***Kata Kunci:** Persamaan Diferensial, Persamaan Adveksi-Difusi, Metode Dekomposisi Adomian Laplace.*

***Abstract.** This paper discusses about the solution of advection-diffusion equation. The advection-diffusion equation is a mathematical equation designed to study the phenomenon of pollutant transport. This paper is using Laplace Adomian Decomposition method to solve the advection-diffusion equation. The Laplace Adomian decomposition method is one of method which can be used to solve a differential equation that combines Laplace transform method and Adomian decomposition method. The solution is obtained by applying the Laplace transform to the advection-diffusion equation, substituting the initial conditions, converting the solution into the form of an infinite series, determining the terms, and applying the inverse Laplace transform to the terms of the infinite series. The results of this paper is the advection-diffusion equation can be solved by using Adomian Laplace decomposition method.*
***Keywords:** Differential Equation, Advection-Diffusion Equation, Laplace Adomian Decomposition Method.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial dapat digunakan untuk memodelkan permasalahan yang biasa ditemukan sehari-hari (Josua, Noviani & Frans, 2020). Salah satu contoh permasalahan yang dapat dimodelkan dalam persamaan diferensial yaitu persamaan adveksi-difusi. Persamaan adveksi-difusi adalah persamaan matematis yang didesain untuk mempelajari fenomena transpor polutan

(Hutomo, Kusuma & Zulfitri, 2019). Persamaan ini merupakan suatu persamaan yang memuat sifat persamaan adveksi dan persamaan difusi. Adapun persamaan adveksi adalah suatu persamaan gelombang linear orde satu dan termasuk dalam persamaan diferensial hiperbolik yang menggambarkan mekanisme transportasi suatu gas atau zat cair dengan arah tertentu (LeVeque, 2004). Sedangkan persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang merupakan representasi perpindahan suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah tanpa dipengaruhi oleh kecepatan gerak fluida media (LeVeque, 2004).

Menyelesaikan persamaan diferensial parsial dapat dilakukan dengan beberapa metode, salah satunya yaitu metode dekomposisi Adomian Laplace. Metode ini merupakan metode semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan mengkombinasikan metode transformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian (Wartono & Muhaijir, 2013).

Penelitian mengenai persamaan adveksi-difusi telah dilakukan oleh beberapa peneliti, seperti yang dilakukan oleh Paskalia (2018) tentang penyelesaian numeris persamaan adveksi-difusi menggunakan metode beda hingga. Selain itu ada juga penelitian mengenai metode dekomposisi Adomian-Laplace seperti penelitian Yulida (2012) yang menggunakan metode dekomposisi Adomian-Laplace dalam menentukan solusi persamaan diferensial nonlinier koefisien fungsi. Sehingga berdasarkan hal tersebut, artikel ini akan membahas tentang menentukan solusi persamaan adveksi-difusi dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian-Laplace.

Persamaan Adveksi-Difusi

Persamaan adveksi-difusi diturunkan dengan menerapkan persamaan dasar mekanika fluida yaitu hukum kekekalan massa. Persamaan hukum kekekalan massa menyatakan, perubahan konsentrasi polutan $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ dalam selang waktu tertentu ditambah dengan net flux adalah 0 (Purnaditya, 2020). Misalkan dalam suatu fluida mengalir dengan kecepatan $\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ terdapat sebuah polutan dengan konsentrasi $\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t})$. Dimana x menyatakan variabel jarak dan t menyatakan variabel waktu.

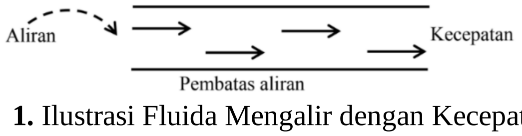
Diketahui persamaan hukum kekekalan massa sebagaimana persamaan (1).

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,t)\big)=0 \text{ atau } u_{\mathrm{t}}+f(u)_x=0 \tag{1}$$

dengan $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\big)$ merupakan flux massa atau laju massa polutan. Flux massa diperoleh dari hasil kali kecepatan $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ dan konsentrasi polutan $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ yang secara matematis dapat ditulis seperti pada persamaan (2).

$$f\big(u(x,t)\big)=\mathrm{c}(x,t)u(x,t) \tag{2}$$

Misalkan suatu fluida mengalami proses adveksi (tidak terjadi proses difusi) dan memiliki kecepatan yang konstan seperti pada Gambar 1.



GAMBAR 1. Ilustrasi Fluida Mengalir dengan Kecepatan Konstan

Sehingga, dengan kecepatan yang konstan, diperoleh flux massa polutan saat adveksi seperti pada persamaan (3).

$$f\big(u(x,t)\big)=Cu(x,t) \tag{3}$$

Kemudian di lain sisi, dimisalkan suatu fluida mengalami proses difusi dengan kecepatannya sama dengan nol atau $c(x,t)=0$ yang artinya fluida tidak bergerak sama sekali. Menurut hukum Fick tentang difusi bahwa fluks massa suatu bahan terlarut (dalam hal ini adalah polutan) berbanding lurus terhadap gradien konsentrasi yaitu turunan konsentrasi terhadap jarak

(Yudhita, 2008). Secara matematis, flux massa polutan saat difusi dapat ditulis seperti pada persamaan (4).

$$\text{Fluks massa polutan} = f\big(u(x,t)\big) = -D\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \tag{4}$$

Dengan D adalah koefisien difusi.

Secara umum, kasus fluida yang mengalir akan mengalami adveksi dan difusi secara bersamaan. Sehingga nilai fluksnya akan berubah menjadi penjumlahan antara fluks massa polutan saat adveksi dengan fluks massa polutan saat difusi. Secara matematis, fluks massa dapat ditulis seperti pada persamaan (5).

$$\begin{gathered} f\big(u(x,t)\big) = f\big(u(x,t)\big)_{adveksi} + f\big(u(x,t)\big)_{difusi} \\ f\big(u(x,t)\big) = Cu(x,t) - D\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \end{gathered} \tag{5}$$

Jika persamaan (5) disubtitusi ke persamaan hukum kekekalan massa (1) maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(Cu(x,t) - D\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + C\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \text{ atau } u_t + Cu_x = Du_{xx} \tag{6}$$

Persamaan (6) merupakan persamaan adveksi-difusi

Metode Dekomposisi Adomian

Perhatikan persamaan (7)

$$Fy(t) = \mathrm{G} \tag{7}$$

dengan F merupakan operator diferensial nonlinear yang memuat bentuk linear dan nonlinear, G adalah fungsi yang diketahui dan $y(t)$ adalah fungsi yang akan ditentukan. Metode dekomposisi Adomian menguraikan bagian nonlinear F menjadi $F = L + R + N$. Sehingga persamaan (7) dapat ditulis menjadi persamaan (8).

$$Ly = G - Ry - Ny \tag{8}$$

Dengan L adalah operator linear yang mempunyai invers, R adalah operator linear lainnya dan N adalah bentuk nonlinear. Selanjutnya, jika persamaan (8) menggunakan operator L^{-1} diperoleh persamaan (9).

$$L^{-1}Ly = L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \tag{9}$$

untuk L^{-1} didefinisikan sebagai invers dari operator L dengan $L(.) = \frac{d^n(.)}{dt^n}$. Sehingga, $L^{-1} = \int_0^t \int_0^t ... \int_0^t (.)\ dt\, dt ... dt$ (Marbun, Imran & Pane, 2013). Jika L merupakan operator orde satu atau $L = \frac{d}{dt}$ maka diperoleh persamaan (10).

$$\begin{gathered} L^{-1}Ly = \int_0^t Ly\ dt \\ L^{-1}Ly = y(t) - y(0) \end{gathered} \tag{10}$$

Persamaan (10) disubtitusi ke persamaan (9) diperoleh persamaan (11).

$$\begin{gathered} y - y(0) = L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \\ y = y(0) + L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \end{gathered} \tag{11}$$

Kemudian Adomian mendefinisikan solusi y sebagai jumlahan deret tak hingga sebagaimana persamaan (11).

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{12}$$

Sedangkan untuk suku nonlinier Ny, Adomian mendefinisikannya seperti pada persamaan (13).

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{13}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (12) dan (13) ke persamaan (11) diperoleh persamaan (14).

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = y(0) \; + \; L^{-1}G \; - \; L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n \; - \; L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{14}$$

Kelebihan dari metode dekomposisi Adomian Laplace yaitu solusi yang diperoleh lebih sederhana dalam bentuk deret tak hingga (Abdy, Side & Arisandi., 2018).

Transformasi Laplace

Definisi 1. (Yulida, 2012)
Diberikan $f(t)$ fungsi dari t untuk $t > 0$. Transformasi Laplace untuk $f(t)$ dituliskan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ dan didefiniskan sebagai berikut:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Untuk semua s sehingga integral ada.
Berikut sifat-sifat dasar dari transformasi Laplace.
1. Sifat Linieritas (Linearity property)

Jika $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, dan c_1 dan c_2 sebarang konstanta maka $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(s)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$

2. Sifat Derivatif

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka turunan ke-n dapat ditulis

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n \, \mathcal{L}\{f(t)\} - f^{(n-1)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{(n-1)} f(0)$$

Definisi 2. (Yulida, 2012)
Jika transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$, ditulis:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Fungsi invers transformasi Laplace tunggal.

Beberapa bentuk transformasi Laplace invers dapat dilihat pada Tabel 1

TABEL 1. Transformasi Laplace Invers

$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n; \quad n = 1,2,3,\dots$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$

(Maharani, 2017)

Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Metode Dekomposisi Adomian Laplace adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang mengkombinasikan antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian yang hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak (Muhaijir, 2010).

Pandang kembali persamaan (8)

$$Ly = G - Ry - Ny$$

Penerapan transformasi Laplace pada persamaan (8) sehingga diperoleh persamaan (15).

$$\mathcal{L}\{L_y\} = \mathcal{L}\{G\} - \mathcal{L}\{R_y\} - \mathcal{L}\{N_y\} \tag{15}$$

Karena

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ dan } N_y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Maka diperoleh persamaan (16)

$$\mathcal{L}\{L_y\} = \mathcal{L}\{G\} - \mathcal{L}\{R_y\} - \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \tag{16}$$

(Wartono & Muhaijir, 2013)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Perhatikan persamaan adveksi-difusi dibawah ini:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < t \leq T \tag{17}$$

Dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L$$

Menentukan solusi dari persamaan adveksi-difusi dengan metode dekomposisi Adomian Laplace adalah sebagai berikut:

a. Mentransformasikan persamaan adveksi-difusi dengan transformasi Laplace

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\, dt \\
&= \lim_{p\to\infty} \int_0^{p} e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\, dt \\
&= \lim_{p\to\infty}\left[e^{-st}u(x,t)\Big|_0^p + s\int_0^p u(x,t)\, e^{-st}dt\right] \\
&= \lim_{p\to\infty}\left[e^{-sp}u(x,p) - e^{0}u(x,0) + s\int_0^p u(x,t)\, e^{-st}dt\right] \\
&= -u(x,0) + s\int_0^{\infty} u(x,t)\, e^{-st}dt \\
&= -u(x,0) + s\, u(x,s)
\end{aligned} \tag{18}$$

Untuk transformasi dari $C\frac{\partial u}{\partial x}$ diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{C\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = C\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}dt$$

Berdasarkan aturan integral leibnizt maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{C\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= C\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}dt \\
&= C\frac{d}{dx}u(x,s)
\end{aligned} \tag{19}$$

Untuk transformasi dari $D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = D\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt$$

Berdasarkan aturan integral leibnizt diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} &= D\frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}\,u(x,t)\,dt \\ &= D\frac{d^2}{dx^2}u(x,s)\end{aligned} \tag{20}$$

kemudian persamaan (18), (19), dan (20) disubtitusikan ke persamaan (17). sehingga diperoleh persamaan (21).

$$\begin{aligned}-u(x,0) + s\,u(x,s) + C\frac{d}{dx}u(x,s) &= C\frac{d^2}{dx^2}u(x,s) \\ s\,u(x,s) &= u(x,0) - C\frac{d}{dx}u(x,s) + D\frac{d^2}{dx^2}u(x,s) \\ u(x,s) &= \frac{u(x,0)}{s} - \frac{C}{s}\frac{d}{dx}u(x,s) + \frac{D}{s}\frac{d^2}{dx^2}u(x,s)\end{aligned} \tag{21}$$

b. Subtitusi nilai awal $u(x,0) = f(x)$

Disubtitusikan nilai awal $u(x,0) = f(x)$ pada persamaan (21) diperoleh persamaan (22).

$$u(x,s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{C}{s}\frac{d}{dx}u(x,s) + \frac{D}{s}\frac{d^2}{dx^2}u(x,s) \tag{22}$$

c. Menyatakan solusi $u(x,s)$ dalam bentuk deret tak hingga $u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Persamaan (22) dinyatakan dalam solusi bentuk deret tak hingga $u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ seperti pada persamaan (23).

$$u(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{C}{s}\left(\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) + \frac{D}{s}\left(\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \tag{23}$$

Dari persamaan (23) diperoleh:

$$\begin{aligned}u_0(x,s) &= \frac{f(x)}{s} \\ u_1(x,s) &= \frac{1}{s}\left[-C\left(\frac{d}{dx}u_0(x,s)\right) + D\left(\frac{d^2}{dx^2}u_0(x,s)\right)\right] \\ &= \frac{1}{s}\left[-C\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + D\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right] \\ u_2(x,s) &= \frac{1}{s}\left[-C\left(\frac{d}{dx}u_1(x,s)\right) + D\left(\frac{d^2}{dx^2}u_1(x,s)\right)\right] \\ &= \frac{1}{s^2}\left[C^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) - 2CD\left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + D^2\left(\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right] \\ &\;\;\vdots \\ u_{n+1}(x,s) &= \frac{1}{s^{n+1}}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-C)^{n-i}D^i\frac{d^{n+i}}{dx^{n+i}}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right), \qquad n \geq 0\end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $u(x,s)$ yaitu

$$u(x,s)=\frac{f(x)}{s}+\frac{1}{s^2}\left[C^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)-2CD\left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)+D^2\left(\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{s^3}\left[-C^3\left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)+3C^2D\left(\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)-3CD^2\left(\frac{d^5}{dx^5}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right.$$
$$\left.+D^3\left(\frac{d^5}{dx^5}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right]+\cdots+\frac{1}{s^{n+1}}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-C)^{n-i}D^i\frac{d^{n+i}}{dx^{n+i}}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)$$

d. Menggunakan invers transformasi Laplace

Selanjutnya menggunakan invers transformasi Laplace pada $u(x,s)$ untuk memperoleh $u(x,t)$.

$$u_0(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right\}=f(x)$$
$$u_1(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left[-C\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)+D\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right]\right\}=\frac{t}{1!}\left(-C\frac{\partial}{\partial x}u_0+D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)$$
$$u_2(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left[C^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)-2CD\left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)+D^2\left(\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{t^2}{2!}\left(C^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0-2CD\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0+D\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0\right)$$
$$\vdots$$
$$u_{n+1}(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-C)^{n-i}D^i\frac{d^{n+i}}{dx^{n+i}}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right\}$$
$$=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-C)^{n-i}D^i\frac{\partial^{n+i}}{\partial x^{n+i}}u_0\right)\qquad ,n\geq 0$$

Jadi, diperoleh solusi persamaan adveksi-difusi seperti berikut.

$$u(x,t)=f(x)+\frac{t}{1!}\left(-C\frac{\partial}{\partial x}u_0+D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right)+\frac{t^2}{2!}\left(C^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0-2CD\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0+D\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0\right)$$
$$+\frac{t^3}{3!}\left(-C^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0+3C^2D\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0-3CD^2\frac{\partial^5}{\partial x^5}u_0+D^3\frac{\partial^6}{\partial x^6}u_0\right)$$
$$+\frac{t^4}{4!}\left(C^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0-4C^3D\frac{\partial^5}{\partial x^5}u_0+6C^2D^2\frac{\partial^6}{\partial x^6}u_0-4CD^3\frac{\partial^7}{\partial x^7}u_0\right.$$
$$\left.+D^4\frac{\partial^8}{\partial x^8}u_0\right)+\cdots+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-C)^{n-i}D^i\frac{\partial^{n+i}}{\partial x^{n+i}}u_0\right)\qquad ,n\geq 0$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian, metode dekomposisi Adomian Laplace dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari persamaan adveksi-difusi. Adapun persamaan adveksi-difusi yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial x}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0<x<L,\qquad 0<t\leq T$$

Dengan syarat awal

$$u(x,0)=f(x),\qquad 0\leq x\leq L$$

Berikut solusi yang diperoleh dari persamaan adveksi-difusi dengan metode dekomposisi Adomian Laplace.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \ & f(x) + \frac{t}{1!}\left(-C\frac{\partial}{\partial x}u_0 + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right) + \frac{t^2}{2!}\left(C^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0 - 2CD\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0 + D\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0\right) \\
& + \frac{t^3}{3!}\left(-C^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0 + 3C^2D\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0 - 3CD^2\frac{\partial^5}{\partial x^5}u_0 + D^3\frac{\partial^6}{\partial x^6}u_0\right) \\
& + \frac{t^4}{4!}\left(C^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0 - 4C^3D\frac{\partial^5}{\partial x^5}u_0 + 6C^2D^2\frac{\partial^6}{\partial x^6}u_0 - 4CD^3\frac{\partial^7}{\partial x^7}u_0 \right.\\
& \left. + D^4\frac{\partial^8}{\partial x^8}u_0\right) + \cdots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-C)^{n-i}D^i\frac{\partial^{n+i}}{\partial x^{n+i}}u_0\right) \qquad , n \geq 0
\end{aligned}
$$

DAFTAR PUSTAKA

Abdy, M., Side, S., & Arisandi, R. (2018). Penerapan Metode Dekomposisi Adomian Laplace Dalam Menentukan Solusi Persamaan Panas. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *1*(2). 206–211.

Hutomo, G. , Kusuma, J., & Zulfitri, W. (2019). Solusi Numerik Menggunakan Metode Dufort Frankel Pada Persamaan Adveksi- Difusi 2d Dengan Koefisien Variabel. *Axiomath: Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, *1*(2). 6–13.

Josua, Noviani, E., & Fran, F. (2020). Fungsi Green Untuk Persamaan Difusi - Adveksi Dengan Syarat Batas Dirichlet. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *14*(2). 205–206.

LeVeque, R. J. (2004). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge university press.

Maharani, R. (2017). Aplikasi Transformasi Laplace Pada Persamaan Differensial Orde Dua Untuk Pendulum Sederhana dan Pendulum Fisis. *Jurnal KONSTANTA*, *1*(1). 1–17.

Marbun, E. G., Imran, M., & Pane, R. (2013). *Metode Dekomposisi Adomian Untuk Menyelesaikan Persamaan Parabolik*. 1–10.

Muhaijir, M. N. (2010). *Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Orde Dua Dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace* (Skripsi). Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru.

Paskalia, M. (2018). *Penyelesaian Numeris Persamaan Adveksi-Difusi Menggunakan Metode Beda Hingga* (Skripsi). Universitas Sanata Dharma Yogyakarta, Yogyakarta.

Purnaditya, N. P. (2020). Penerapan Konsep Lagrangian-Eularian dalam Pengembangan Dasar Model Matematika Hidraulika Aliran dan Transportasi Polutan: Sebuah Kajian Literatur. *Jurnal Fondasi*, *9*(2). 175–187.

Wartono, & Muhaijir, M. N. (2013). Penyelesaian persamaan riccati dengan menggunakan metode dekomposisi adomian laplace. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, *10*(2). 97–101.

Yudhita, N. (2008). *Pengembangan Model Adveksi-Dispersi Berbasis Spreadsheet Elektronik, Studi Kasus Simulasi Konsentrasi Biochemical Oxygen Demand* (Skripsi). Universitas Indonesia, Depok.

Yulida, Y. (2012). Metode Dekomposisi Adomian Laplace Untuk Solusi Persamaan Diferensial Nonlinier Koefisien Fungsi. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, *6*(1). 17–26.