Jumlahan Langsung pada Ring

Syafruddin Side^{1, a)}, Muhammad Abdy^{1, b)}, dan Annisa Uniarti^{c)}

¹ Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Makassar

^{a)} syafruddin@unm.ac.id

^{b)} muh.abdy@unm.ac.id

^{c)} annisauniarti@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka yang bertujuan untuk mengkaji konsep dasar jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada ring beserta sifat-sifatnya. Kajian dimulai dari definisi jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Adapun literatur utama yang digunakan adalah buku yang ditulis oleh B. Hartley dan T.O. Hawkes (1970). Hasil yang diperoleh menjelaskan dan menguraikan definisi konsep jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada ring, teorema-teorema tentang sifat-sifat jumlahan langsung pada ring yang memuat masing-masing sebuah teorema akibat dari representasi sifat jumlahan langsung pada S-Near Ring dan jumlahan langsung pada modul yang berkaitan dengan jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada ring.

Kata Kunci: Ring, Jumlahan Langsung Eksternal, Jumlahan Langsung Internal.

Abstract. This research is literature study that aims to examine the basic concept of external direct sum of ring, internal direct sum of ring, and properties of direct sum of ring. The study starts from the definition of external direct sum and internal direct sum. The main literature used is a book written by B. Hartley and T.O. Hawkes (1970). The result obtained explain and elaborated on the definitions of external direct sum and internal direct sum of ring, theorems about properties of direct sum of ring that accommodate a theorem resulting from the representation of the properties of direct sum of S-Near Ring and direct sum of modules relating to external direct sum and internal direct sum of ring.

Keywords: Ring, External Direct Sum, Internal Direct Sum.

PENDAHULUAN

Menurut James (1976), matematika diartikan sebagai ilmu logika mengenai bentuk, susunan, besaran, dan konsep-konsep yang saling berhubungan satu sama lainnya dengan jumlah yang terbagi ke dalam tiga bidang yaitu aljabar, analisis, dan geometri (Side, Sukarna, & Jusriadi, 2020). Aljabar abstrak atau struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma (Sanusi, Abdy, Sidjara, & Asni, 2020).

Struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong R dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya asosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers dan komutatif dinamakan grup abelian. Sedangkan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$) yang memenuhi tiga aksioma diantara yaitu $(R, +)$ berupa grup abelian, operasi kedua ($\times$) bersifat asosiatif dan operasi kedua ($\times$) bersifat distributif terhadap operasi pertama (+) disebut ring (Dummit & Foote, 2004).

Selain itu, ada pula yang disebut dengan *S-near Ring* yang tidak jauh berbeda dengan ring, yaitu apabila terdapat himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ yang memenuhi tiga aksioma diantara yaitu $(R, +)$ berupa grup, operasi kedua $(\times)$ bersifat asosiatif dan operasi kedua $(\times)$ bersifat distributif kanan terhadap operasi pertama $(+)$ (Patty, 2014). Selanjutnya, struktur aljabar yang mempunyai dua himpunan tak kosong dengan dua operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu disebut dengan modul (Wildanianti, 2009).

Selain itu, dalam struktur aljabar, terdapat sebuah operasi yang disebut “jumlahan langsung”. Jumlahan langsung dengan jumlahan biasa tidak sama. Pada penjumlahan biasa tidak memperhatikan urutan komponennya, tetapi pada penjumlahan langsung memperhatikan urutannya (Wildanianti, 2009). Jumlahan langsung terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Yunita Wildanianti pada tahun 2009 telah membahas tentang penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam pada struktur aljabar modul beserta sifat-sifatnya dalam penelitiannya yang berjudul Penjumlahan Langsung pada Modul.

Penelitian ini bertujuan untuk memaparkan definisi dan sifat-sifat dari jumlahan langsung pada ring baik itu jumlahan langsung eksternal maupun jumlahan langsung internal dengan mendetailkan bukti dari teorema yang telah diperoleh dari sumber utama dalam buku Hartley & Hawkes tahun 1970 dan menunjukkan bahwa beberapa sifat yang berlaku pada struktur aljabar lain juga berlaku pada ring.

KAJIAN TEORI

Definisi 1 (Tahmir, 2004 & Judson, 2013)

Misal G himpunan tak kosong, operasi $*$ pada G adalah operasi biner jika untuk setiap $a, b \in G$ maka $a * b \in G$

Definisi 2 (Pinter, 1990 & Gallian, 2017)

Himpunan tak kosong G dengan sebuah operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi sifat berikut :

- (i) Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c \in G$ (sifat asosiatif)
- (ii) Terdapat $e \in G$ sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$ (adanya unsur identitas di G)

Untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (adanya unsur invers setiap anggota di G)

Definisi 3 (Clark, 1984 & Tahmir, 2018)

Misalkan $(G, *)$ dan (G', o) masing-masing adalah grup. Suatu fungsi $f: G \rightarrow G'$ dinamakan suatu homomorfisma jika $f(a * b) = f(a) o f(b)$ untuk setiap $a, b \in G$.

Selanjutnya jika $f: G \rightarrow G'$ suatu homomorfisma, maka f juga disebut :

- a. Monomorfisma jika f injektif
- b. Epimorfisma jika f surjektif
- c. Isomorfisma jika f bijektif
- d. Endomorfisma Jika $G = G'$

Automorfisma jika $G = G'$ dan f bijektif

Definisi 4 (Dummit dan Foote, 2004 & Joyce, 2017)

Misalkan R suatu himpunan tak kosong dan pada R di definisikan dua operasi biner yang dinotasikan $+$ dan $\cdot$, yang selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\cdot$ jika memenuhi sifat :

- (i) $(R, +)$ merupakan grup komutatif
- (ii) Operasi $\cdot$ di R bersifat tertutup, yaitu:
 $(r_1 \cdot r_2) \in R$

- untuk setiap $r_1, r_2 \in R$
- (iii) Operasi $\cdot$ di R bersifat asosiatif, yaitu:
 $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$
 untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$
- (iv) Operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:
- Distributif kiri:
 $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$
 - Distributif kanan:
 $(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$

Definisi 5 (Suryanti, 2018)

Misalkan R adalah suatu Ring dan I adalah himpunan bagian dari Ring R dengan $I \neq \emptyset$, maka I disebut Ideal dari R jika:

- Untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$
- Untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r, r s_1 \in I$

Apabila hanya memenuhi salah satu yaitu untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r \in I$ maka disebut ideal kanan dan untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $r s_1 \in I$ maka disebut ideal kiri.

Teorema 1 (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartono, 2016)

Jika R merupakan ring dengan I_1 dan I_2 masing-masing merupakan ideal dari R , maka

- $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di R
- $I_1 + I_2 = \{a + b | a \in I_1 \text{ dan } b \in I_2\}$ merupakan ideal di R

Bukti

Diketahui I_1 dan I_2 masing-masing merupakan ideal dari R .

- akan dibuktikan $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di R .
 ambil sebarang $r \in R$ dan $x, y \in I_1 \cap I_2$.
 karena $x, y \in I_1, x, y \in I_2, I_1$ dan I_2 ideal, diperoleh:
 - $x - y \in I_1$ dan $x - y \in I_2$
 - $rx \in I_1$ dan $xr \in I_1$
 - $rx \in I_2$ dan $xr \in I_2$
 akibatnya, $x - y \in I_1 \cap I_2, rx \in I_1 \cap I_2$, dan $xr \in I_1 \cap I_2$.
 jadi, $I_1 \cap I_2$ merupakan ideal di R .
- akan dibuktikan $I_1 + I_2$ merupakan ideal di R .
 ambil sebarang $r \in R$ dan $x, y \in I_1 + I_2$, tulis $x = a_1 + a_2, y = b_1 + b_2$, untuk suatu $a_1, b_1 \in I_1$ dan $a_2, b_2 \in I_2$. Karena I_1, I_2 merupakan ideal di R diperoleh $a_1 - b_1 \in I_1$ dan $a_2 - b_2 \in I_2, r a_1 \in I_1, a_1 r \in I_1, r a_2 \in I_2, a_2 r \in I_2$ sehingga
 - $x - y = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)$
 $= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \in I_1 + I_2$
 - $xr = (a_1 + a_2)r$
 $= a_1 r + a_2 r \in I_1 + I_2$
 - $rx = r(a_1 + a_2)$
 $= r a_1 + r a_2 \in I_1 + I_2$

jadi, $I_1 + I_2$ merupakan ideal di R

Definisi 6 (Bhattacharya, Jain, & Nagpaul, 1994 & Gilbert & Gilbert, 2015)

misal A, B adalah himpunan. Hasil kali kartesian dari A dan B adalah:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan merupakan jenis penelitian dasar atau murni, serta menggunakan metode studi literatur. Yaitu, dengan membaca literatur-literatur yang berhubungan dengan

jumlahan langsung pada ring. Fokus kajian dalam penelitian ini terletak pada definisi dan teorema dalam jumlahan langsung pada ring.

HASIL PENELITIAN

Definisi 7 (Hartley dan Hawkes, 1970)

Misalkan $R_1, R_2, \dots, R_n$ adalah kumpulan ring dan R adalah Hasil kali kartesian pada himpunan R_i , dan didefinisikan operasi pada R "secara komponen", yaitu:

- (i) $(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$
- (ii) $-(r_1, r_2, \dots, r_n) = (-r_1, -r_2, \dots, -r_n)$
- (iii) $(r_1, r_2, \dots, r_n)(s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_n s_n)$

Dengan $(0, 0, \dots, 0)$ sebagai elemen nol/identitas. R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1, R_2, \dots, R_n$ dan dinotasikan sebagai

$$R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n.$$

Definisi 8 (Hartley dan Hawkes, 1970)

Misal R adalah ring, dan $J_1, \dots, J_n$ adalah ideal-ideal dari R , sedemikian sehingga

- (i) $R = \sum_{i=1}^n J_i$, dan
- (ii) $J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$, untuk $i = 1, \dots, n$.

Maka R disebut sebagai jumlahan langsung internal dari ideal-ideal J_i yang dinotasikan sebagai $R = \bigoplus J_i$

Teorema 2

Jumlahan langsung eksternal dari ring adalah ring.

Bukti

Diketahui $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ merupakan jumlahan langsung eksternal dari ring R_i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Ambil sebarang $a, b, c \in R$, tulis $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, untuk suatu $a_1, b_1, c_1 \in R_1, a_2, b_2, c_2 \in R_2, a_n, b_n, c_n \in R_n$, akan ditunjukkan $(R, +, \cdot)$ merupakan ring.

i. $(R, +)$ grup

1. Tertutup

Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \end{aligned}$$

dengan $(a_1 + b_1) \in R_1, (a_2 + b_2) \in R_2, \dots, (a_n + b_n) \in R_n$

jadi $(a + b) \in R$

2. Asosiatif

Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n) \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n)) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) \\ &= a + (b + c) \end{aligned}$$

3. Terdapat unsur identitas

Untuk setiap $a \in R$, terdapat $e \in R$, sehingga $a + e = e + a = a$.

Ambil sebarang $a \in R$, akan ditunjukkan terdapat $e \in R$ tulis $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, dengan $e_1 \in R_1, e_2 \in R_2, \dots, e_n \in R_n$ sehingga berlaku

$$a + e = e + a = a$$

Pilih $0_R \in R$, tulis $0_R = (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n})$, dengan $0_{R_i} \in R_i$, 0_{R_i} adalah unsur identitas di R_i .

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} a + 0_R &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}) \\ &= (a_1 + 0_{R_1}, a_2 + 0_{R_2}, \dots, a_n + 0_{R_n}) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0_R + a &= (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= (0_{R_1} + a_1, 0_{R_2} + a_2, \dots, 0_{R_n} + a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Jadi $0_R \in R$ adalah unsur identitas di R .

4. Untuk setiap unsur memiliki invers

Untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0_R$.

Ambil $a \in R$ sebarang, akan ditunjukkan terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga berlaku

$$a + a^{-1} = a^{-1} + a = 0_R$$

Diketahui $0_R = (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n})$

$$a + a^{-1} = 0_R$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + a^{-1} = (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n})$$

$$\begin{aligned} a^{-1} &= (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}) - (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= (0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n}) + (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \\ &= (0_{R_1} + (-a_1), 0_{R_2} + (-a_2), \dots, 0_{R_n} + (-a_n)) \\ &= (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in R \end{aligned}$$

Sehingga $a^{-1} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ adalah unsur invers untuk setiap $a \in R$.

5. Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$

$$\begin{aligned} (a + b) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n) \text{ [karena } a_i, b_i \in R_i, i = 1, 2, \dots, n] \\ &= b + a \end{aligned}$$

- ii. $(R, \cdot)$ semigrup

1. Tertutup

Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \end{aligned}$$

dengan $(a_1 b_1) \in R_1, (a_2 b_2) \in R_2, \dots, (a_n b_n) \in R_n$

jadi $(a \cdot b) \in R$

2. Asosiatif

Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= ((a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= ((a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n \cdot b_n) \cdot c_n) \\ &= (a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \dots, a_n \cdot (b_n \cdot c_n)) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n)) \\ &= a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

3. $(R, +, \cdot)$ distributif kanan dan kiri

Untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku:

1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1. Distributif kanan

$$\begin{aligned}
 (a + b) \cdot c &= ((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\
 &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\
 &= ((a_1 + b_1) \cdot c_1, (a_2 + b_2) \cdot c_2, \dots, (a_n + b_n) \cdot c_n) \\
 &= ((a_1 \cdot c_1) + (b_1 \cdot c_1), (a_2 \cdot c_2) + (b_2 \cdot c_2), \dots, (a_n \cdot c_n) + (b_n \cdot c_n)) \\
 &= (a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot c_n + b_1 \cdot c_1, b_2 \cdot c_2, \dots, b_n \cdot c_n) \\
 &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\
 &= a \cdot c + b \cdot c
 \end{aligned}$$

2. Distributif kiri

$$\begin{aligned}
 a \cdot (b + c) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot ((b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n)) \\
 &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n) \\
 &= (a_1 \cdot (b_1 + c_1), a_2 \cdot (b_2 + c_2), \dots, a_n \cdot (b_n + c_n)) \\
 &= ((a_1 \cdot b_1) + (a_1 \cdot c_1), (a_2 \cdot b_2) + (a_2 \cdot c_2), \dots, (a_n \cdot b_n) + (a_n \cdot c_n)) \\
 &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n + a_1 \cdot c_1, a_2 \cdot c_2, \dots, a_n \cdot c_n) \\
 &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (c_1, c_2, \dots, c_n) \\
 &= a \cdot b + a \cdot c
 \end{aligned}$$

Teorema 3

Jika $R = \bigoplus P_i$, dengan P_i ideal dari R , $i = 1, 2, \dots, n$ dengan:

$$Q_1 = P_1 + P_2 + \dots + P_{k_1}$$

$$Q_2 = P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \dots + P_{k_1+k_2}$$

$$Q_3 = P_{k_1+k_2+1} + P_{k_1+k_2+2} + \dots + P_{k_1+k_2+k_3}$$

.

.

.

$$Q_r = P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1} + P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+2} + \dots + P_n$$

maka $R = \bigoplus Q_j, j = 1, 2, \dots, r$.

Bukti

Diketahui $R = \bigoplus P_i$, dengan P_i ideal dari R , $i = 1, 2, \dots, n$ dan

$$Q_1 = P_1 + P_2 + \dots + P_{k_1}$$

$$Q_2 = P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \dots + P_{k_1+k_2}$$

$$Q_3 = P_{k_1+k_2+1} + P_{k_1+k_2+2} + \dots + P_{k_1+k_2+k_3}$$

.

.

.

$$Q_r = P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1} + P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+2} + \dots + P_n$$

akan dibuktikan $R = \bigoplus Q_j, j = 1, 2, \dots, r$.

karena $R = \bigoplus P_i$ maka berlaku:

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$= P_1 + P_2 + \dots + P_{k_1} + P_{k_1+1} + P_{k_1+2} + \dots + P_{k_1+k_2} + P_{k_1+k_2+1} + \dots + P_{k_1+k_2+k_3} + \dots + P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+1} + P_{k_1+k_2+\dots+k_{r-1}+2} + \dots + P_n$$

$$= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_r \quad [\text{tetap ideal}]$$

$$= \bigoplus Q_j$$

Teorema 4 (Hartley dan Hawkes, 1970)

Jika R adalah jumlahan langsung internal dari ideal-ideal $J_1, J_2, \dots, J_n$, maka untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis secara tunggal bentuk

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

dengan $r_i \in J_i$

Bukti

Misalkan $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r_1' + r_2' + \dots + r_n'$, dengan $r_i, r_i' \in J_i$. akan ditunjukkan $r_i = r_i'$. perhatikan bahwa

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = r_1' + r_2' + \dots + r_n'$$

$$\Leftrightarrow (r_1 + r_2 + \dots + r_n) - (r_1' + r_2' + \dots + r_n') = 0$$

$$\Leftrightarrow (r_1 - r_1') + (r_2 - r_2') + \dots + (r_n - r_n') = 0$$

$$\Leftrightarrow (r_1 - r_1') + (r_2 - r_2') + \dots + (r_{i-1} - r_{i-1}') + (r_i - r_i') + (r_{i+1} - r_{i+1}') + \dots + (r_n - r_n') = 0$$

$$\Leftrightarrow r_i - r_i' = -(r_1 - r_1') - (r_2 - r_2') - \dots - (r_{i-1} - r_{i-1}') - (r_{i+1} - r_{i+1}') - \dots - (r_n - r_n')$$

$$\Leftrightarrow r_i - r_i' = (r_1' - r_1) + (r_2' - r_2) + \dots + (r_{i-1}' - r_{i-1}) + (r_{i+1}' - r_{i+1}) + \dots + (r_n' - r_n)$$

karena $r_i, r_i' \in J_i$, maka $r_i - r_i' \in J_i$

selanjutnya karena $r_1' - r_1 \in J_1, r_2' - r_2 \in J_2, \dots, r_{i-1}' - r_{i-1} \in J_{i-1}, r_{i+1}' - r_{i+1} \in J_{i+1}, \dots, r_n' - r_n \in J_n$, maka $\sum_{j \neq i} (r_j' - r_j) = r_i - r_i' \in \sum_{j \neq i} J_j$

perhatikan bahwa R merupakan jumlahan langsung internal, sehingga

$$J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$$

karena $r_i - r_i' \in J_i$ dan $r_i - r_i' \in \sum_{j \neq i} J_j$, akibatnya $r_i - r_i' \in J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$

sehingga diperoleh $r_i - r_i' = 0$

dengan bentuk lain $r_i = r_i'$.

Jadi, untuk setiap $r \in R$ dapat ditulis secara tunggal bentuk $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$

dengan $r_i \in J_i$. ■

PEMBAHASAN

Penelitian yang dilakukan oleh Wildanianti (2009) yang berjudul penjumlahan langsung pada modul telah menunjukkan tentang konsep dari penjumlahan langsung luar dan dalam pada modul, yaitu penjumlahan langsung luar adalah perkalian langsung dari kumpulan modul dan jumlahan langsung dalam adalah penjumlahan langsung dari kumpulan submodul yang memenuhi syarat tertentu. Sementara dalam penelitian ini didapatkan konsep dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal yaitu jumlahan langsung eksternal adalah hasil kali kartesian dari kumpulan ring $R_1, R_2, \dots, R_n$ yang dinotasikan dengan $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ yang telah di bahas dalam Definisi 7, jumlahan langsung internal adalah kumpulan dari ideal-ideal di R yang memenuhi $R = \sum_{i=1}^n J_i$, dan $J_i \cap \sum_{j \neq i} J_j = \{0\}$, untuk $i = 1, \dots, n$, dimana J_i adalah ideal-ideal di R yang telah di bahas dalam Definisi 8.

Penelitian yang dilakukan oleh Patty (2014) yang berjudul hasil kali langsung S -near-ring dan S -near-ring bebas menunjukkan bahwa sebuah jumlahan langsung dari S -near-ring adalah S -near-ring, hal ini mendasari terbentuknya Teorema 2 dengan tujuan untuk membuktikan bahwa sifat tersebut juga berlaku pada ring. Selanjutnya, penelitian Wildanianti (2009) juga membahas sebuah teorema yang menunjukkan bahwa jumlahan langsung internal dari submodul-submodul katakan M yang apabila jumlah dari tiap submodul merupakan jumlah dari submodul-submodul

lain maka M juga merupakan jumlahan langsung internal dari submodul-submodul lain tersebut. Hal ini mendasari terbentuknya Teorema 3. Selain itu, dalam penelitian ini juga telah dibahas Teorema 4 yang menunjukkan bahwa bentuk $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$, dengan $r_i \in J_i$ hanya dapat ditulis secara tunggal untuk setiap $r \in R$, di mana R adalah jumlahan langsung internal dari ideal-ideal nya yaitu $J_i, i = 1, 2, \dots, n$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang dipaparkan sebelumnya, telah diperoleh dengan jelas konsep dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada ring yang tidak jauh berbeda dengan penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam pada modul. Selain itu, beberapa sifat jumlahan langsung pada struktur aljabar selain ring juga berlaku pada ring.

DAFTAR PUSTAKA

- Bhattacharya, P.B., Jain, S.K., Nagpaul, S.R. (1994). *Basic Abstract Algebra*. Inggris: Cambridge University Press
- Clark, A. (1984). *Elements of Modern Algebra*. New York: Dover Publisher, Inc.
- Dummit, D.S., & Foote, R.M. (2004). *Abstract Algebra*. United States of America: Laurie Rosatone
- Gallian, J.A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*. United States of America: Cengage Learning
- Gilbert, L., & Gilbert, J. (2005). *Elements of Modern Algebra*. United States of America: Cengage Learning
- Hartley, B., & Hawkes, T.O. (1970). *Rings, Modules, and Linear Algebra*. Inggris: Cambridge University Press
- Joyce, D. (2017). *Introduction to Modern Algebra*. United States of America: Clark University
- Judson, T.W. (2013). *Abstract Algebra*. United States of America: Stephan F. Austin State University
- Patty, H.W.M. (2014). Hasil Kali Langsung S-Near-Ring dan S-Near-Ring Bebas. *Jurnal Barekang*, 8(2). 1-7.
- Pinter, C.C. (1990). *A Book of Abstract Algebra*. New York: Dover Publisher, Inc.
- Sanusi, W., Abdy, M., Sidjara, S., & Asni, A.A. (2020). Suatu Kajian Tentang B-Aljabar. *Journal of Mathematics, Computation, and Statistics*, 3(2). 118-125.
- Side, S., Sukarna, & Jusriadi. (2020). Analisis Matematika Pada Pembuatan Rumah Panggung Toraja. *Journal of Mathematics, Computation, and Statistics*, 3(1). 1-10.
- Suryanti, S. (2018). *Teori Ring*. Gresik: UGM Press
- Tahmir, S. (2004). *Teori Grup*. Makassar: Andira Publisher
- Tahmir, S. (2018). *Struktur Aljabar*. Makassar: Badan Penerbit Universitas Negeri Makassar
- Wahyuni, S., Wijayanti, I.E., Yuwaningsih, D.A., Hartono, A.D. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Wildanianti, Y. (2009). *Penjumlahan Langsung pada Modul*. (Skripsi). Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang.