Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 118 – 125)
Vol. 3. No. 2, Oktober 2020
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Suatu Kajian Tentang B-Aljabar

Wahidah Sanusi[1, a)], Muhammad Abdy[1, b)], Sahlan Sidjara[1, c)] dan Asriani Arsita Asni[1, d)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224*

[a)] wahidah.sanusi@unm.ac.id
[b)]muh.abdy@unm.ac.id
[c)]sahlansidjara@unm.ac.id
[d)]arsitaasni98@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini merupakan penelitian kajian kepustakaan yang bertujuan untuk mengkaji konsep dan sifat-sifat terkait B-Aljabar. Konsep B-Aljabar dalam penelitian ini berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Neggers dan Kim serta Allen. Seluruh pembahasan dalam penelitian ini menggunakan himpunan tegas, baik himpunan berhingga maupun himpunan tidak berhingga. Hasilnya, dapat diberikan bukti yang lebih lengkap dari sifat-sifat B-Aljabar serta hubungannya dengan grup. Suatu grup dengan definisi operasi khusus dan elemen identitas* $e = 0$ *merupakan B-Aljabar. Lebih lanjut dapat diturunkan beberapa teorema grup kedalam B-Aljabar seperti pemetaan natural dan Teorema Isomorfisma 1 yang dalam pembuktiannya memiliki kemiripan dengan pembuktian pada grup dengan tetap menggunakan sifat-sifat B-Aljabar itu sendiri.*
Kata Kunci: *B-Aljabar, B-Subaljabar, B-Homomorfisma, B-Isomorfisma*

Abstract. *This research is a literature studies that aims at reviewing the concepts and properties of B-Algebras. The concept of B-Algebras in this article is based on research that has been done by Neggers and Kim and Allen. All discussions in this article use the firm sets, both finite sets and infinite sets. As a result, more complete evidence of the properties of B-Algebras can be given and its relationship with the group. A group with a specific operation and has* $e = 0$ *as an identity element is a B-Algebras. Moreover, a number of group theorems can be derived into B-Algebra such as natural mapping and the First Isomorphism Theorems which in their proof have similarities to the proofs of groups while still using the properties of B-Algebra itself.*
Keywords: *B-Algebras, B-Subalgebras, B-Homomorphism, B-Isomorphism*

PENDAHULUAN

Aljabar abstrak atau struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma. Struktur aljabar yang biasa dikenal adalah struktur aljabar dengan satu operasi biner, yaitu grup dan struktur aljabar dengan dua operasi biner, yaitu ring. Salah satu struktur aljabar lainnya adalah K-Aljabar.

Gagasan mengenai K-Aljabar pertama kali diperkenalkan oleh K.H. Dar dan M.Akram pada tahun 2006 (Aprilisa, Bakar, & Yanita, 2019). Dar dan Akram menggali konsep grup dalam aljabar yang jika ditambahkan dengan operasi biner ternyata menghasilkan suatu konsep baru, yaitu K-Aljabar yang memuat definisi, sifat-sifat, serta beberapa teorema. K-Aljabar terbagi menjadi dua

kelas berdasarkan grup pembangunnya yaitu B-Aljabar yang dibangun oleh grup tidak komutatif dan Q-Aljabar yang dibangun oleh grup yang komutatif (Dar & Akram, 2007).

Penelitian terkait B-Aljabar telah dilakukan oleh Neggers dan Kim (2002) yang berjudul *On B-Algebras* yang membahas tentang konsep B-Aljabar secara *general*. Penelitian yang dilakukan oleh Neggers & Kim (2002) telah memaparkan konsep dan sifat-sifat B-Aljabar secara umum namun pembuktian dalam artikel tersebut belum lengkap sehingga hal ini membuka peluang untuk mengkaji kembali sifat-sifat yang telah diberikan. Adapun dalam penelitian ini membahas lebih lanjut mengenai B-Aljabar. Yaitu dengan melengkapi pembuktian sifat-sifat dasar B-Aljabar dari penelitian terkait serta mengkaji sifat-sifat B-Aljabar mengenai subaljabar, homomorfisma dan isomorfisma dalam B-Aljabar. Penelitian ini merupakan jenis penelitian dasar atau murni dengan metode kajian kepustakaan.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan mempelajari grup dan materi dasar B-Aljabar. Menunjukkan dan membuktikan sifat-sifat B-Aljabar terkait subaljabar dan homomorfisma berdasarkan sifat grup, karena kemiripan konsep dari keduanya. Selanjutnya menjelaskan hubungan antara B-Aljabar dan grup.

HASIL DAN PEMBAHASAN

B-Aljabar dan Sifat-sifatnya

Definisi 1 (Neggers dan Kim, 2002)
Misalkan X himpunan tak kosong dengan operasi biner "$*$" dan bilangan konstan 0 *atau ditulis* $(X{:}*,0)$*disebut B-Aljabar jika* $\forall x, y, z \in X$ *memenuhi aksioma berikut.*

(i) $x * x = 0$
(ii) $x * 0 = x$
(iii) $(x * y) * z = x * (z * (0 * y))$**.**

Definisi 2 (Kim dan Park, 2005)
Suatu B-Aljabar X dikatakan komutatif jika $\forall x, y \in X$ *berlaku* $x * (0 * y) = y * (0 * x)$**.**

Lemma 1 (Neggers dan Kim, 2002)

Jika $(X{:}*,0)$ *B-Aljabar, maka* $\forall x, y \in X$ *berlaku*

a. $x * y = x * \big(0 * (0 * y)\big)$
b. $(x * y) * (0 * y) = x$

Bukti

a. Diambil sebarang $x, y \in X$. Berdasarkan sifat (ii) dan sifat (iii) B-Aljabar dapat diperoleh $x * y = x * (0 * (0 * y))$.
b. Diambil sebarang $x, y \in X$. Misal $z = (0 * y)$. Diperhatikan bahwa $(x * y) * (0 * y) = (x * y) * z$. Karena $z = (0 * y)$ diperoleh $(x * y) * (0 * y) = x * (z * z)$. Berdasarkan sifat (i) dan sifat (ii) B-Aljabar diperoleh $(x * y) * (0 * y) = x$.

Preposisi 1 (Walendziak, 2005)
Jika $(X{:}*,0)$ *adalah B-Aljabar maka* $\forall x, y, z \in X$ *berlaku*

a. $(x * z) * (y * z) = x * y$
b. $y * x = 0 * (x * y)$

Bukti

a. Diambil sebarang $x.y \in X$. Berdasarkan sifat (iii) diperoleh $(x * z) * (y * z) = x * \big((y * z) * (0 * z)\big) = x * (y * \big((0 * z) * (0 * z)\big))$. Selanjutnya dengan sifat (i) dan sifat (ii) diperoleh $(x * z) * (y * z) = x * y$.

b. Diambil sebarang $x.y \in X$. Berdasarkan Lemma 1 diperoleh $y * x = y * ((x * y) * (0 * y))$. Selanjutnya dengan sifat (iii) dan sifat (i) diperoleh $y * x = 0 * (x * y)$.

Preposisi 2 (Neggers dan Kim, 2002)

Jika $(X{:}*,0)$ *adalah B-Aljabar maka* $\forall x, y, z \in X$ *berlaku* $x * (y * z) = \big(x * (0 * z)\big) * y$

Bukti

Diambil sebarang $x, y, z \in X$. Berdasarkan Lemma 1(a) diperoleh $x * (y * z) = x * \Big(y * \big(0 * (0 * z)\big)\Big)$. Selanjutnya dengan sifat (iii) diperoleh $x * (y * z) = \big(x * (0 * z)\big) * y$.

Lemma 2 (Neggers dan Kim, 2002)

Misal $(X{:}*,0)$ *adalah B-Aljabar, maka* $\forall x, y \in X$ *berlaku:*

a. $x * y = 0 \Longrightarrow x = y$

b. $0 * (0 * x) = x$

Bukti

Diambil sebarang $x, y \in X$

a. Diperhatikan bahwa $x * y = 0$. Berdasarkan sifat (i), $x * y = y * y$. Diperoleh $(x * y) * (0 * y) = (y * y) * (0 * y)$. Misal $u = 0 * y$. Akibatnya $(x * y) * (0 * y) = (y * y) * (0 * y)$ menjadi $(x * y) * u = (y * y) * u$. Selanjutnya menggunakan sifat (iii), sifat (i) dan sifat (ii) diperoleh $x = y$.

b. Berdasarkan sifat (ii) dan sifat (iii) diperoleh $0 * (0 * x) = 0 * \big((0 * x) * 0\big) = 0 * (0 * (0 * (0 * x)))$. Misal $y = 0 * x$ maka $0 * (0 * x) = 0 * (0 * (0 * y))$. Selanjutnya dengan sifat (iii) dan sifat (ii) serta Lemma 1(b) diperoleh $0 * (0 * x) = x$.

Lemma 3 (Neggers dan Kim, 2002)

Misal $(X{:}*,0)$ *B-Aljabar dan* $\forall x, y, z \in X$. *Jika* $x * z = y * z$ *maka* $x = y$.

Bukti

Diambil seberang $x, y, z \in X$. Diperhatikan bahwa $x * z = y * z$ dioperasikan kedua ruas dengan u dimana $u = 0 * z$ diperoleh $(x * z) * u = (y * z) * u$. Dengan sifat (iii) dan sifat (i) serta sifat (ii) diperoleh $x = y$.

Teorema 1 (Jung dan Kim, 2001)

Misalkan $(X{:}*,0)$ *B-Aljabar, dan* $\forall x, y, z \in X$. *Jika* $x * y = x * z$ *maka* $y = z$.

Bukti

Diambil sebarang $x, y, z \in X$ dengan $x * y = x * z$ maka $0 * (x * y) = 0 * (x * z)$. Dengan Preposisi 2 dan Lemma 2(b) diperoleh $y * x = z * x$. Berdasarkan Lemma 3 diperoleh $y = x$.

B-Subaljabar dan B-Subaljabar Normal

Definisi 3 (Jun, Roh, dan Kim, 2002)

Suatu subset tidak kosong $\mathcal{N}$ *dari suatu B-Aljabar X disebut subaljabar dari X jika* $\forall x, y \in \mathcal{N}$ *berlaku* $x * y \in \mathcal{N}$.

Lemma 4 (Walendziak, 2005)

Misal $\mathcal{N}$ *suatu subaljabar dari X dan* $x, y \in X$. *Jika* $x * y \in \mathcal{N}$ *maka* $y * x \in \mathcal{N}$.

Bukti

Misal $x * y \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Proposisi 1(b), $y * x = 0 * (x * y)$. Perhatikan bahwa $0 \in \mathcal{N}$ dan $x * y \in \mathcal{N}$, sehingga $0 * (x * y) \in \mathcal{N}$. Akibatnya $y * x \in \mathcal{N}$.

Definisi 4 (Walendziak, 2005)

Suatu subset tidak kosong $\mathcal{N}$ dari B-Aljabar X disebut subaljabar normal jika $\forall x * y \in \mathcal{N}$ dan $\forall a * b \in \mathcal{N}$ berlaku $(x * a) * (y * b) \in \mathcal{N}$.

Semua subaljabar normal dari B-Aljabar X merupakan subaljabar dari X. Jelas bahwa $\{0\}$ dan X adalah subaljabar normal dari X. Misal himpunan semua subaljabar dari X ditulis sebagai $Sub(X)$ (Walendziak, 2005).

Teorema 2 (Walendziak, 2005)
Jika $\mathcal{N} \in Sub(X)$, maka pernyataan berikut ekuivalen:
a. $\mathcal{N}$ merupakan subaljabar normal
b. Jika $x \in X$ dan $y \in \mathcal{N}$, maka $x * (x * y) \in \mathcal{N}$

Bukti
$(a \Longrightarrow b)$*:*
Diambil sebarang $x \in X$ dan $y \in \mathcal{N}$. Maka $x * x = 0 \in \mathcal{N}$ dan $0 * y \in \mathcal{N}$. Karena $\mathcal{N}$ subaljabar normal, maka $(x * 0) * (x * y) \in \mathcal{N}$. Dengan sifat (ii) diperoleh $x * (x * y) \in \mathcal{N}$.
$(b \Longrightarrow a)$*:*
Diambil sebarang $x * y,\ a * b \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Lemma 4 diperoleh $b * a \in \mathcal{N}$. Dengan konsep Preposisi 1(a) diperoleh $(0 * a) * (0 * b) = (0 * a) * ((0 * a) * (b * a))$. Misal $x = 0 * a$ dan $y = b * a$ maka berdasarkan pernyataan (b) diperoleh $(x * (x * y) = (0 * a) * \big((0 * a) * (b * a)\big) \in \mathcal{N}$. Jadi $(0 * a) * (0 * b) \in \mathcal{N}$.

Selanjutnya diperhatikan bahwa berdasarkan sifat (iii) diperoleh $x * \Big(x * \big((0 * a) * (0 * b)\big)\Big) = (x * a) * (x * b)$.
Misal $y = (0 * a) * (0 * b) \in \mathcal{N}$ maka berdasarkan pernyataan (b) diperoleh $x * (x * y) = x * \Big(x * \big((0 * a) * (0 * b)\big)\Big) = (x * a) * (x * b) \in \mathcal{N}$
Selanjutnya karena $(x * a) * (x * b) \in \mathcal{N}$ dan berdasarkan Lemma 4 diperoleh $(y * x) \in \mathcal{N}$ dengan $\mathcal{N}$ subaljabar maka $\big((x * a) * (x * b)\big) * (y * x) \in \mathcal{N}$. Kemudian dengan sifat (iii) dan Preposisi 1 diperoleh $\big((x * a) * (x * b)\big) *= (x * a) * (y * b)$. Karena $\big((x * a) * (x * b)\big) * (y * x) \in \mathcal{N}$ maka $(x * a) * (x * b) \in \mathcal{N}$. Akibatnya $\mathcal{N}$ suatu B-Aljabar normal.

B-Aljabar Kuosien

Definisi 5 (Lingcong dan Endam, 2016)

Misal X suatu B-Aljabar dan $\mathcal{N}$ subaljabar normal dari X. Maka $(X/\mathcal{N}{:}*, 0\mathcal{N})$ merupakan B-Aljabar yang disebut B-Aljabar Kuosien dari X modulo $\mathcal{N}$ dengan $X/\mathcal{N} = \{x\mathcal{N} \mid x \in X\}$ dan operasi $*$ yang didefinisikan $x\mathcal{N} * y\mathcal{N} = (x * y)\mathcal{N}$. Untuk $x \in X$, $x\mathcal{N}$ merupakan kelas ekivalen yang memuat x, yaitu $x\mathcal{N} = \{y \in X \mid x \sim_{\mathcal{N}} y\}$.

Misal diberikan subaljabar normal $\mathcal{N}$ dari B-Aljabar X, relasi $\sim_{\mathcal{N}}$ didefinisikan oleh $x \sim_{\mathcal{N}} y$ jika dan hanya jika $x * y \in \mathcal{N}$ untuk setiap $x, y \in X$. Maka $\sim_{\mathcal{N}}$ adalah relasi kongruen dari X. Perhatikan bahwa $x\mathcal{N} = y\mathcal{N}$ jika dan hanya jika $x \sim_{\mathcal{N}} y$ (Lingcong dan Endam, 2016). Dari pernyataan tersebut diperoleh $x\mathcal{N} = y\mathcal{N} \Leftrightarrow x \sim_{\mathcal{N}} y$ dan $x \sim_{\mathcal{N}} y \Leftrightarrow x * y \in \mathcal{N}$ untuk setiap $x, y \in X$. Akibatnya :

$$x\mathcal{N} = y\mathcal{N} \Leftrightarrow x * y \in \mathcal{N}, \text{ untuk setiap } x * y \in \mathcal{N}. \quad (1)$$

B-Homomorfisma

Definisi 6 (Al-Shehri, 2010)
Misal X dan Y adalah B-Aljabar yang berturut-turut dinyatakan sebagai $(X{:}*, 0_X)$ dan $(Y{:}*, 0_Y)$. Suatu fungsi $\varphi{:}\, X \longrightarrow Y$ disebut B-Homomorfisma dari X ke Y jika untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$.

Suatu B-homomorfisma φ disebut B-monomorfisma jika φ fungsi satu-satu, B-Epimorfisma jika φ fungsi surjektif (onto) serta B-Isomorfisma jika φ fungsi bijektif.

Teorema 3
Jika $f: X \longrightarrow Y$ suatu B-Homomorfisma maka $f(0_X) = 0_Y, 0_X$ merupakan unsur nol di X dan 0_Y merupakan unsur nol di Y.

Bukti
Misal $f: X \longrightarrow Y$ suatu B-Homomorfisma. Diambil sebarang $a \in X$ dan 0_X merupakan unsur nol di X. Diperhatikan bahwa $a * a = 0_X$. Karena f yang B-Homomorfisma maka $a * a = 0_X \Longrightarrow f(a) * f(a) = f(0_X)$. Selanjutnya perhatikan bahwa $f(a) \in Y$ dan Y merupakan B-Aljabar. Maka berdasarkan sifat(i) dari B-Aljabar diperoleh $f(a) * f(a) = 0_Y$ dengan 0_Y merupakan unsur nol di Y. Karena $f(a) * f(a) = f(0_X)$ dan $f(a) * f(a) = 0_Y$ maka $f(0_X) = 0_Y$.

Teorema 4
Jika $f: X \longrightarrow Y$ suatu B-Epimorfisma dengan X komutatif, maka Y komutatif.

Bukti.
Misal $f: X \longrightarrow Y$ suatu B-Epimorfisma. Diambil sebarang $x, y \in Y$. Karena f B-Epimorfisma, maka terdapat $a, b \in X$ sehingga $x = f(a)$ dan $y = f(b)$. Akan dibuktikan bahwa $f(a) * [f(0) * f(b)] = f(b) * [f(0) * f(a)]$. Diperhatikan bahwa f B-Epimorfisma yang berarti f B-Homomorfisma. Sehingga $f(a) * [f(0) * f(b)] = f(a) * f(0 * b) = f(a * (0 * b))$. Karena X komutatif maka $f(a) * [f(0) * f(b)] = f(b * (0 * a))$. Selanjutnya karena f B-Homomorfisma maka diperoleh $f(a) * [f(0) * f(b)] = f(b) * f(0 * a) = f(b) * [f(0) * f(a)]$. Diperoleh $f(a) * [f(0) * f(b)] = f(b) * [f(0) * f(a)]$ untuk suatu $f(a), f(b) \in Y$. Sehingga Y komutatif.

Kernel

Definisi 7 (Lingcong dan Endam, 2016)
Misal $\varphi: X \longrightarrow Y$ suatu B-homomorfisma. Kernel dari φ didefinisikan $Ker(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0_Y\}$.

Teorema 5 (Lingcong dan Endam, 2016)
Jika $\varphi: X \longrightarrow Y$ suatu B-Homomorfisma maka $Ker(\varphi)$ merupakan subaljabar normal dari X.

Bukti
Misal $\varphi: X \longrightarrow Y$ suatu B-Homomorfisma. Akan dibuktikan $Ker(\varphi) \neq \emptyset$. Diperhatikan bahwa $0_Y \in Y$ dan $0_X \in X$. Berdasarkan Teorema 3 diperoleh $\varphi(0_X) = 0_Y$. Akibatnya $0_X \in Ker(\varphi)$, jadi $Ker(\varphi) \neq \emptyset$. Selanjutnya, $Ker(\varphi) \subseteq X$ jelas berdasarkan Definisi 7.

Selanjutnya akan dibuktikan $Ker(\varphi)$ suatu subaljabar dari X yaitu $x * y \in Ker(\varphi), \forall x, y \in X$. Diambil sebarang $x, y \in Ker(\varphi)$. Diperhatikan bahwa jika $x \in Ker(\varphi)$ maka $\varphi(x) = 0_Y$ serta jika $y \in Ker(\varphi)$ maka $\varphi(y) = 0_Y$. Diperoleh $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y) = 0_Y * 0_Y = 0_Y$. Karena $\varphi(x * y) = 0_Y$ maka $x * y \in Ker(\varphi)$.

Selanjutnya akan dibuktikan $Ker(\varphi)$ suatu subaljabar normal dari X. Berdasarkan Teorema 2, cukup dibuktikan bahwa $x * (x * y) \in Ker(\varphi)$ untuk suatu $x \in X$ dan $y \in Ker(\varphi)$. Diambil sebarang $x \in X$ dan $y \in Ker(\varphi)$. Diperhatikan bahwa $y \in Ker(\varphi)$ maka $\varphi(y) = 0_Y$, sehingga diperoleh $\varphi\big(x * (x * y)\big) = \varphi(x) * \varphi(x * y)$. Dengan menggunakan definisi B-Homomorfisma dan sifat (ii) serta sifat (i) diperoleh $\varphi\big(x * (x * y)\big) = 0_Y$. Karena $\varphi(x * (x * y)) = 0_Y$ maka $x * (x * y) \in Ker(\varphi)$. Jadi $Ker(\varphi)$ merupakan subaljabar normal dari X.

Pemetaan Natural

Teorema 6
Jika X suatu B-Aljabar dan $\mathcal{N}$ subaljabar normal dari X maka terdapat fungsi $\theta: X \longrightarrow X/\mathcal{N}$ yang merupakan B-Epimorfisma.

Bukti
Misal X suatu B-Aljabar, $\mathcal{N}$ subaljabar normal dari X. Dikonstruksi pengaitan
$\theta: X \longrightarrow X/\mathcal{N}$
$a \longrightarrow a\mathcal{N}$

Akan dibuktikan θ suatu B-epimorfisma.

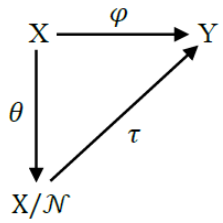
Pertama akan dibuktikan θ fungsi. Diambil sebarang $a, b \in X$, dengan $a = b$. Akan dibuktikan $\theta(a) = \theta(b)$. Diperhatikan bahwa $a, b \in X$ maka $\theta(a) = a\mathcal{N} = b\mathcal{N} = \theta(b)$. Sehingga θ fungsi.

Selanjutnya akan dibuktikan θ suatu B-homomorfisma. Diambil sebarang $a, b \in X$. Diperhatikan bahwa $\theta(a * b) = (a * b)\mathcal{N}$. Sesuai Definisi 5 diperoleh $\theta(a * b) = a\mathcal{N} * b\mathcal{N} = \theta(a) * \theta(b)$. Sehingga θ suatu B-homomorfisma.

Kemudian akan dibuktikan θ surjektif. Diammbil sebarang $\bar{a} \in X/\mathcal{N}$, tulis $\bar{a} = a\mathcal{N}$ untuk suatu $a \in X$. Dipilih $a \in X$, maka $\theta(a) = a\mathcal{N} = \bar{a}$. Sehingga θ surjektif. Jadi θ merupakan B-Epimorfisma.

B-Isomorfisma

Teorema 7 Teorema Isomorfisma 1
Jika $\varphi: X \longrightarrow Y$ suatu B-Epimorfisma dan $Ker(\varphi) = \mathcal{N}$, maka terdapat secara tunggal pemetaan $\tau: \frac{X}{\mathcal{N}} \longrightarrow Y$ yang B-Isomorfisma sedemikian sehingga diagram berikut komutatif. $\tau \circ \theta = \varphi$ dan $X/\mathcal{N} \approx Y$.



GAMBAR 1. Diagram Isomorfisma B-Aljabar

Bukti
Misal $\varphi: X \longrightarrow Y$ suatu B-epimorfisma dengan $Ker(\varphi) = \mathcal{N}$
$\varphi: a \longrightarrow \varphi(a)$
Didefinisikan pengaitan
$\tau: X/\mathcal{N} \longrightarrow Y$
$a\mathcal{N} \longrightarrow \varphi(a)$
Akan dibuktikan τ suatu B-Isomorfisma.
Diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in X/\mathcal{N}$, tulis $\bar{a} = a\mathcal{N}$ dan $\bar{b} = b\mathcal{N}$ untuk suatu $a, b \in X$ dengan $\bar{a} = \bar{b}$. Akan dibuktikan τ suatu fungsi yaitu dengan membuktikan $\tau(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$. Diperhatikan bahwa $\bar{a} = \bar{b}$ artinya $a\mathcal{N} = b\mathcal{N}$. Berdasarkan Persamaan 1.1 diperoleh $a * b \in \mathcal{N}$. Karena $Ker(\varphi) = \mathcal{N}$ maka $a * b \in Ker(\varphi)$ yang berarti $\varphi(a * b) = 0_Y$. Karena φ suatu B-Epimorfisma maka φ juga merupakan B-Homomorfisma sehingga diperoleh $\varphi(a) * \varphi(b) = 0_Y$. Karena $\varphi(a), \varphi(b), 0_Y \in Y$ dengan Y suatu B-Aljabar maka menurut Lemma 2(a) diperoleh $\varphi(a) * \varphi(b) = 0_Y \Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Longrightarrow \tau(a\mathcal{N}) = \tau(b\mathcal{N}) \Longrightarrow \tau(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$.

Selanjutnya diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in X/\mathcal{N}$, tulis $\bar{a} = a\mathcal{N}$ dan $\bar{b} = b\mathcal{N}$ untuk suatu $a, b \in X$. Diperhatikan bahwa $\tau(\bar{a} * \bar{b}) = \tau(a\mathcal{N} * b\mathcal{N})$. Berdasarkan Definisi 5 diperoleh $\tau(\bar{a} * \bar{b}) = \tau((a * b)\mathcal{N})$. $\tau((a * b)\mathcal{N})$ merupakan pemetaan ke Y, artinya $\tau((a * b)\mathcal{N}) = \varphi(a * b)$, akibatnya $\tau(\bar{a} * \bar{b}) = \varphi(a * b)$. Kemudian karena φ B-Homomorfisma maka $\tau(\bar{a} * \bar{b}) =$

$\varphi(a) * \varphi(b) = \tau(a\mathcal{N}) * \tau(b\mathcal{N}) = \tau(\bar{a}) * \tau(\bar{b})$. Diperoleh $\tau(\bar{a} * \bar{b}) = \tau(\bar{a}) * \tau(\bar{b})$ yang berarti τ suatu B-homomorfisma.

Selanjutnya akan dibuktikan τ surjektif. Diambil sebarang $a \in Y$, karena φ B-Epimorfisma maka φ surjektif jadi terdapat $a' \in X$ sehingga $\varphi(a') = a$. Karena θ merupakan suatu pemetaan natural akibatnya $\theta(a') = a'\mathcal{N} = \bar{a} \in \frac{X}{\mathcal{N}}$. Dipilih $\bar{a} = a'\mathcal{N} \in \frac{X}{\mathcal{N}}$ sehingga $\tau(\bar{a}) = \tau(a'\mathcal{N})$. Karena $a'\mathcal{N} \in \frac{X}{\mathcal{N}}$ dan terdapat pemetaan θ ke $\frac{X}{\mathcal{N}}$ maka dapat ditulis $\tau(a) = \tau(\theta(a')) = (\tau \circ \theta)(a') = \varphi(a') = a$. Diperoleh $\tau(a) = a$ yang berarti τ surjektif.

Kemudian akan dibuktikan τ injektif. Diambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in X/\mathcal{N}$, tulis $\bar{a} = a\mathcal{N}$ dan $\bar{b} = b\mathcal{N}$ untuk suatu $a, b \in X$ dengan $\tau(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$. Akan dibuktikan $\bar{a} = \bar{b}$. Diperhatikan bahwa $\tau(\bar{a}) = \tau(\bar{b})$ yang berarti $\tau(a\mathcal{N}) = \tau(b\mathcal{N}) \Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$. Dengan mengoperasikan kedua ruas dengan $\varphi(b)$ diperoleh $\varphi(a) * \varphi(b) = \varphi(b) * \varphi(b)$. Karena B-Aljabar maka sifat (i) berlaku sehingga $\varphi(a) * \varphi(b) = 0_Y$. Berdasarkan Definisi 7 diperoleh $a * b \in Ker(\varphi)$. Karena $Ker(\varphi) = \mathcal{N}$ maka $a * b \in \mathcal{N}$. Sesuai Persamaan 1.1 diperoleh $a\mathcal{N} = b\mathcal{N} \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$. Sehingga τ injektif.

Terakhir akan dibuktikan τ tunggal. Misal terdapat pemetaan $\tau' : X/\mathcal{N} \longrightarrow Y$ dengan $\tau' \circ \theta = \varphi$ dan $\tau \circ \theta = \varphi$. Akan dibuktikan $\tau' = \tau$. Diambil sebarang $\bar{a} \in X/\mathcal{N}$, tulis $\bar{a} = a\mathcal{N}$ untuk suatu $a \in X$. Diperhatikan bahwa $\tau'(\bar{a}) = \tau'(a\mathcal{N}) = \tau'(\theta(a)) = (\tau' \circ \theta)(a) = \varphi(a) = (\tau \circ \theta)(a) = \tau(\theta(a)) = \tau(a\mathcal{N}) = \tau(\bar{a})$. Sehingga τ tunggal.
Jadi $\tau : X/\mathcal{N} \longrightarrow Y$ suatu B-Isomomorfisma.

Hubungan B-Aljabar dan Grup

Teorema 8 (Allen, Neggers, dan Kim, 2004)
Misal $(X{:}\diamond, 0)$ *suatu grup dan* $\forall x, y, z \in X$. *Jika didefinisikan* $x * y = x \diamond y^{-1}$, *maka* $(X{:}*, 0)$ *adalah suatu B-Aljabar.*

Bukti
Diambil sebarang $x, y, z \in X$. Diperhatikan bahwa $x * x = x \diamond x^{-1} = 0$ dan $x * 0 = x \diamond 0^{-1} = x$, jadi memenuhi aksioma (i) dan (ii) pada B-Aljabar. Selanjutnya diperhatikan bahwa $(x * y) * z = (x \diamond y^{-1}) * z = (x \diamond y^{-1}) \diamond z^{-1} = x \diamond (y^{-1} \diamond z^{-1})$. Karena $x \diamond (y^{-1} \diamond z^{-1})$ merupakan elemen grup X maka sifat grup berlaku sehingga diperoleh $(x * y) * z = x \diamond (y^{-1} \diamond z^{-1}) = x \diamond (z \diamond y)^{-1}$. Berdasarkan definisi $x * y$ diperoleh $(x * y) * z = x * (z \diamond y)$. Kemudian dengan sifat invers grup diperoleh $(x * y) * z = x * (z \diamond (y^{-1})^{-1}) = x * (z * y^{-1})$. Karena y^{-1} elemen grup X, maka $y^{-1} = 0 \diamond y^{-1} = 0 * y$ sehingga $x * (z * y^{-1}) = x * (z * (0 * y))$. Jadi $(X{:}*, 0)$ merupakan B-Aljabar.

KESIMPULAN

Pada penelitian dibuktikan lebih lengkap tentang B-Aljabar yang terdapat dalam penelitian yang dilakukan oleh Neggers dan Kim (2002) dan Allen, dkk (2004). Serta mengaplikasikan beberapa teorema dari konsep grup pada B-Aljabar dan hubungan antara keduanya. Selain itu, cakupan penelitian lebih diperluas hingga konsep subaljabar, subaljabar normal, B-Homomorfisma, pemetaan natural serta Teorema Isomorfisma 1. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian tentang Teorema Isomorfisma 2, Teorema Isomorfisma 3 hingga konsep automorfisma pada B-Aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Allen, P., Neggers, J., & Kim, H. S. (2004). B-Algebras and Groups. *Scientiae Mathematicae Japonicae, 59*(1). 23–30.

Al-Shehri, N. (2010). On Hom(-, -) as B-Algebras. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 18*(1). 17-24.

Aprilisa, M., Bakar, N. N., & Yanita. (2019). Sifat-Sifat K-Aljabar. *Jurnal Matematika UNAND, 8(*2). 93-100.

Dar, K. H., & Akram, M. (2007). On K-Homomorphisms of K-Algebras. *International Mathematical Forum, 2*(46). 2283 - 2293.

Jun, Y. B., Roh, E. H., & Kim, H. S. (2002). On Fuzzy B-Algebras. *Czechoslovak Mathematical Journal, 52*(127). 375–384.

Jung, R., & Kim, H. S. (2001). On B-Algebras And Quasigroups. *Quasigroups And Related System, 8*(1). 1-6.

Kim, H. S., & Park, H. G. (2005). On 0-Commutative B-Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae, 62*(1). 31-36.

Lingcong, J. A., & Endam, J. C. (2016). Direct Product Of B-Algebras. *International Journal of Algebra, 10*(1). 33-40.

Neggers, J., & Kim, H. S. (2002). On B-Algebras. *Matematiqki Vesnik,* 54(1-2). 21-29.

Walendziak, A. (2005). A Note On Normal Subalgebras In B-Algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 62*(1). 1-5.