Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 183 – 188)
Vol. 2. No. 2, Oktober 2019
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Sifat-sifat Submodul Prima dan Submodul Prima Lemah

Hisyam Ihsan[1, a)], Muhammad Abdy[1, b)], dan Samsu Alam.B[2, c)]

[1] *Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Makassar*

[a)]hisyam.ihsan@unm.ac.id
[b)]muh.abdy@unm.ac.id
[c)]alamsamsu90@gmail.com

***Abstrak**. Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka yang bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat submodul prima dan submodul prima lemah serta hubungan antara keduanya. Kajian dimulai dari definisi submodul prima dan submodul prima lemah, selanjutnya dikaji mengenai sifat-sifat dari keduanya. Pada penelitian ini, semua ring yang diberikan adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan modul yang diberikan adalah modul uniter. Sebagai hasil dari penelitian ini diperoleh beberapa pernyataan yang ekuivalen, misalkan M suatu R-modul , N submodul sejati di M dan $(N: M) = Ann_R(M/N)$ ideal di R, maka ketiga pernyataan berikut ekuivalen, (1) N merupakan submodul prima, (2) Setiap submodul tak nol dari M/N R-modul memiliki annihilator yang sama, (3) Untuk setiap submodul K di M, subring A di R, jika berlaku $AK \subseteq N$ maka $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$. Di lain hal, pada submodul prima lemah jika diberikan M suatu R-modul, N submodul sejati di M, maka pernyataan berikut ekuivalen, yaitu (1) Submodul N merupakan submodul prima lemah, (2) Untuk setiap $x, y \in M$, jika $(N: x) \neq (N: y)$ maka $N = (N + Rx) \cap (N + Ry)$. Selain itu, didapatkan pula hubungan antara keduanya, yaitu setiap submodul prima merupakan submodul prima lemah.*

***Kata Kunci:** Submodul Prima, Submodul Prima Lemah, Ideal Prima.*

***Abstract.** This research is literature study that aims to examine the properties of prime submodules and weakly prime submodules and the relationship between both of them. The study starts from the definition of prime submodules and weakly prime submodules, then reviewed about the properties both of them. Throughout this paper all rings are commutative with identity and all modules are unitary. As the result of this research, obtained several equivalent statements, let M be a R-module, N be a proper submodule of M and $(N: M) = Ann_R(M/N)$ ideal of R, then the following three statetments are equivalent, (1) N is a prime submodule, (2) Every nonzero submodule of M/N R-module has the same annihilator, (3) For any submodule K of M, subring A of R, if $AK \subseteq N$ then $K \subseteq N$ or $A \subseteq (N: M)$. In other case, for weakly prime submodules, if given M is a unitary R-module, N be a proper submodule of M, then the following statements are equivalent, (1) N is a weakly prime submodule, (2) For any $x, y \in M$, if $(N: x) \neq (N: y)$ then $N = (N + Rx) \cap (N + Ry)$. In addition, also found the relationship between both of them, i.e. any prime submodule is weakly prime submodule.*

***Keywords:** Prime Submodules, Weakly Prime Submdules, Prime Ideal.*

PENDAHULUAN

Teori ring telah memperkenalkan adanya konsep ideal prima, yaitu suatu ideal sejati I di ring R, dimana untuk setiap $a, b \in R$, jika berlaku $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$ (Khusnawati, 2017). Begitupun halnya dalam teori modul, terdapat konsep submodul prima yang merupakan generalisasi dari ideal prima pada suatu ring. Lebih lanjut, generalisasi dari pendefinisian submodul prima di M R-modul memotivasi munculnya definisi submodul prima lemah di suatu M R-modul.

Beberapa peneliti telah mengkaji terlebih dahulu mengenai submodul prima dan submodul prima lemah (Dauns, 1978; Lu, 1984; Behboodi & Koohy, 2004; Azizi, 2006; Atani & Farzalipour, 2007; Hadi, 2009). Dauns (1978) memaparkan sifat-sifat dari submodul prima sebagai generalisasi ideal prima pada ring, sedangkan Azizi (2006) memberikan sifat-sifat dari submodul prima lemah sebagai generalisasi dari submodul prima. Namun, pembuktian sifat-sifat yang diberikan belum lengkap sehingga hal ini membuka peluang untuk mengkaji kembali sifat-sifat yang diberikan sebelumnya.

Pada penelitian ini, dibuktikan secara lebih lengkap mengenai sifat-sifat submodul prima dan submodul prima lemah yang telah dipaparkan sebelumnya oleh Dauns (1978) dan Azizi (2006). Selain itu, semua ring yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan modul yang diberikan adalah modul uniter.

HASIL PENELITIAN

Definisi 1 (Azizi, 2006)

Diberikan M R-modul dan submodul sejati N di M. Submodul N disebut submodul prima di M jika untuk setiap $m \in M$ dan $r \in R$ dengan $rm \in N$ berakibat $m \in N$ atau $r \in (N : M)$ dengan $(N: M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$.

Teorema 1 (Dauns, 1978)

Jika M suatu R-modul, N submodul sejati di M, dan $(N: M) = Ann_R(M/N)$ ideal di ring R, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

(i) Submodul N merupakan submodul prima.

(ii) Setiap submodul tak nol di M/N R-modul memiliki annihilator yang sama yaitu $(N: M)$.

(iii) Untuk setiap submodul K di M dan subring A di R jika $AK \subseteq N$ maka $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$.

Bukti

(i) $\Longrightarrow$ (ii):

Misal M suatu R-modul, N submodul prima di M, dan $(N: M) = Ann_R(M/N)$ merupakan ideal di ring R. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap submodul tak nol di M/N R-modul memiliki annihilator yang sama yaitu $(N: M)$. Diambil sebarang submodul tak nol K/N di M/N R-modul, kemudian diambil sebarang $a \in Ann_R(M/N)$, yang artinya $a\bar{b} = \bar{0}, \forall \bar{b} \in (M/N)$. Karena K/N merupakan submodul dari M/N maka $K/N \subseteq M/N$. Hal ini berarti untuk sebarang $\bar{a} \in K/N$ berakibat $a\bar{b} = \bar{0}$. Jadi $a \in Ann_R(K/N)$. Selanjutnya, karena N submodul prima maka untuk sebarang $m \in M \backslash N$ dan $r_1 \in R$ jika $r_1 m \in N$ maka $r_1 \in (N: M)$. Dengan kata lain, untuk sebarang $r \in Ann_R(K/N)$ maka berlaku $r \in (N: M)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i):

Misal M suatu R-modul dan setiap submodul tak nol di M/N R-modul memiliki annihilator yang sama yaitu $(N: M)$. Akan dibuktikan bahwa N merupakan submodul prima. Diambil sebarang $m \in M \backslash N$ dengan $rm \in N$ untu suatu $r \in R$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan $\langle m + N \rangle = \{r_1\, m + N \,|\, r_1 \in R\}$ merupakan submodul tak nol di M/N R-modul. Selanjutnya, dari yang diketahui diperoleh bahwa $Ann_R\, \langle m + N \rangle) = (N: M)$. Hal ini berarti untuk sebarang $r_1 \in Ann_R\, (\langle m + N \rangle)$ maka diperoleh $r_1 \in (N: M)$. Karena $rm \in N$ maka dapat dipahami bahwa $r \in Ann_R\, (\langle m + N \rangle)$ yang artinya $r \in (N: M)$. Jadi N merupakan submodul prima di M R-modul.

(i) ⟹ (iii):
Misal M suatu R-modul dan N merupakan submodul prima di M. Akan dibuktikan bahwa jika untuk setiap submodul K di modul M dan subring A di ring R dengan $AK \subseteq N$ maka $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$. Diambil sebarang submodul K di M dan subring A di ring R dengan $AK \subseteq N$, selanjutnya diambil sebarang $k \in K$ dan $a \in A$, karena K submodul di M dan $a \in R$ maka diperoleh $ak \in K$, di lain pihak, $ak \in AK \subseteq N$, jadi $ak \in N$. Dikarenakan N merupakan submodul prima dan $ak \in N$ maka $k \in N$ atau $a \in (N: M)$. Karena k diambil sebarang di submodul K dan a diambil sebarang di subring A, ini berarti $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$.

(iii) ⟹ (i):
Misal M suatu R-modul, himpunan N merupakan submodul sejati di M, dan untuk setiap submodul K di M, subring A di ring R, jika $AK \subseteq N$ maka $K \subseteq N$ atau $A \subseteq (N: M)$. Akan dibuktikan bahwa N merupakan submodul prima di M. Diambil sebarang $m \in M$ dan $r \in R$ dengan $rm \in N$. Dapat ditunjukkan bahwa $\langle rm \rangle = \{r_1 rm \mid r_1 \in R\}$ merupakan submodul di N dan $\langle rm \rangle = \langle r \rangle \langle m \rangle$ dengan $\langle r \rangle$ subring di ring R dan $\langle m \rangle$ submodul di M. Diperhatikan bahwa $\langle rm \rangle = \langle r \rangle \langle m \rangle \subseteq N$ maka berdasarkan yang diketahui diperoleh $\langle m \rangle \subseteq N$ atau $\langle r \rangle \subseteq (N: M)$ yang artinya $m \in N$ atau $r \in (N: M)$.

Teorema 2 (Dauns, 1978)

Misal M suatu R-modul dan N merupakan submodul prima di M, maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku:

(i) *Didefinisikan himpunan $\overline{N} = \{m \in M \mid Rm \subseteq N\}$, jika $RM \not\subseteq N$ maka $\overline{N} = N$.*

(ii) *Himpunan $(N: M)$ merupakan ideal prima di ring R.*

(iii) *Didefinisikan himpunan $((N: M): R) = \{r \in R \mid rR \subseteq (N: M)\}$, maka $((N: M): R) = (N: M)$.*

Bukti

(i) Misal M suatu R-modul dan N submodul prima di M dengan $RM \not\subseteq N$. Akan dibuktikan bahwa $\overline{N} = N$. Diambil sebarang $x \in \overline{N}$ yang artinya $x \in M$ dengan $Rx \subseteq N$, diperoleh $rx \in N$, $\forall r \in R$. Diperhatikan bahwa N merupakan submodul prima di M R-modul sehingga jika $rx \in N$ maka $x \in N$ atau $r \in (N: M)$, $\forall r \in R$. Andaikan $r \in (N: M)$, $\forall r \in R$ artinya $RM \subseteq N$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa $RM \not\subseteq N$. Jadi haruslah $x \in N$, akibatnya $\overline{N} \subseteq N$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in N$, karena N submodul di M maka $x \in M$ dan berlaku $rx \in N, \forall r \in R$. Hal ini berarti $Rx \subseteq N$. Jadi $x \in \overline{N}$, akibatnya $N \subseteq \overline{N}$.

(ii) Misal M suatu R-modul dan N submodul prima di M. Akan dibuktikan bahwa $(N: M)$ ideal prima di ring R. Jelas bahwa $(N: M) \neq \emptyset$ karena $0_R \in (N: M)$, demikian pula jelas $(N: M) \subseteq R$. Diambil sebarang $a, b \in (N: M)$ yang artinya $aM \subseteq N$ dan $bM \subseteq N$. Karena N submodul di M maka $(-b)M = -(bM) \subseteq N$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in (a - b)M$, maka $x = (a - b)m_1$ untuk suatu $m_1 \in M$. Diperhatikan bahwa elemen $x = (a - b)m_1 = am_1 - bm_1 \in N$, diperoleh $x \in N$. Jadi $a - b \in (N: M)$. Kemudian, diambil sebarang $r \in R$, karena N submodul dan $r \in R$ maka $r(aM) \subseteq N$. Dari definisi modul diperoleh bahwa $r(aM) = (ra)M \subseteq N$, akibatnya $ra \in (N: M)$. Jadi $(N: M)$ ideal di ring R.
Selanjutnya, akan ditunjukkan keprimaannya. Andaikan $(N: M) = R$, karena $1_R \in R$ maka $1_R \in (N: M)$. Berdasarkan definisi $(N: M)$ diperoleh $1_R M = M \subseteq N$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa N merupakan submodul prima di M. Jadi, pengandaian salah, akibatnya haruslah $(N: M) \neq R$. Selanjutnya, diambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab \in (N: M)$. Misalkan $a \notin (N: M)$, akan ditunjukkan $b \in (N: M)$. Karena $ab \in (N: M)$ maka $(ab)M \subseteq N$ yang artinya $(ab)m = a(bm) \in N$, $\forall m \in N$.

Diperhatikan bahwa N submodul prima, $a(bm) \in N$, dan $a \notin (N: M)$ maka $bm \in N$, $\forall m \in M$. Hal ini berarti $bM \subseteq N$, jadi $b \in (N: M)$.

(iii) Misal M suatu R-modul dan N submodul prima di M. Akan dibuktikan bahwa $((N: M): R) = (N: M)$. Karena N merupakan submodul prima di M maka berdasarkan *(ii)* diperoleh $(N: M)$ merupakan ideal prima di ring R. Diambil sebarang $x \in (N: M)$, karena $(N: M)$ ideal di ring R maka untuk setiap $r \in R$ berlaku $rx \in (N: M)$. Hal ini berarti $Rx \subseteq (N: M)$, sehingga $Rx = xR \subseteq (N: M)$. Jadi $x \in ((N: M): R)$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in ((N: M): R)$, maka $x \in R$ dan $xR \subseteq (N: M)$ yang yang berarti $xr \in (N: M)$, $\forall r \in R$. Karena $(N: M)$ ideal prima di ring R, maka jika $xr \in (N: M)$ berlaku $x \in (N: M)$ atau $r \in (N: M)$, $\forall r \in R$. Andaikan berlaku $r \in (N: M)$, $\forall r \in R$ maka diperoleh $R \subseteq (N: M)$. Hal ini kontradiksi dengan pernyatan bahwa $(N: M)$ merupakan ideal prima di ring R. Jadi haruslah $x \in (N: M)$.

Definisi 2 (Azizi, 2006)

Suatu submodul sejati N dari M R-modul dikatakan submodul prima lemah jika untuk setiap submodul K dari M, $a, b \in R$ dengan $abK \subseteq N$ berakibat $aK \subseteq N$ atau $bK \subseteq N$.

Akibat 2.1

Suatu submodul sejati N dari suatu M R-modul dikatakan submodul prima lemah jika dan hanya jika $abm \in N$ dimana $a, b \in R$, $m \in M$ berakibat $am \in N$ atau $bm \in N$.

Bukti

$(\Rightarrow)$
Misal M suatu R-modul dan N merupakan submodul prima lemah di M. Akan dibuktikan bahwa jika $abm \in N$ dengan $a, b \in R$, $m \in M$ berakibat $am \in N$ atau $bm \in N$. Misalkan $abm \in N$ dengan $a, b \in R$, $m \in M$, karena N submodul prima lemah maka berdasarkan yang diketahui dapat dipilih submodul $K = M$, diperoleh jika $abM \subseteq N$ maka $aM \subseteq N$ atau $bM \subseteq N$. Hal ini berarti, untuk sebarang $m \in M$ jika $abm \in N$ maka $am \in N$ atau $bm \in N$.

$(\Leftarrow)$
Misal M suatu R-modul, himpunan N merupakan submodul sejati di M, dan jika $abm \in N$ dengan $a, b \in R$, $m \in M$ berakibat $am \in N$ atau $bm \in N$. Akan dibuktikan bahwa N merupakan submodul prima lemah di M. Diambil sebarang submodul K di M dengan $abK \subseteq N$, karena $abK \subseteq N$ dan K merupakan submodul di M maka $abk \in N$, $\forall k \in K \subseteq M$. Berdasarkan yang diketahui diperoleh $ak \in N$ atau $bk \in N$, $\forall k \in K$. Hal ini berarti $aK \subseteq N$ atau $bK \subseteq N$.

Lemma 1 (Azizi, 2006)

Misal M suatu R-modul dan N submodul sejati di M. Submodul N dikatakan submodul prima lemah jika dan hanya jika untuk setiap submodul K di M yang tidak termuat di N berakibat $(N: K)$ ideal prima di R. Lebih jauh $(N: M)$ merupakan ideal prima di R.

Bukti

$(\Rightarrow)$
Misal N suatu submodul prima lemah di M R-modul. Diambil sebarang K submodul di M dengan $K \nsubseteq N$, akan dibuktikan bahwa $(N: K)$ merupakan ideal prima di ring R. Analog dengan pembuktian $(N: M)$ ideal pada Teorema 3 (ii) maka dapat ditunjukkan $(N: K)$ ideal di ring R. Selanjutnya, diambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab \in (N: K)$, maka $abK \subseteq N$. Dimisalkan bahwa

$a \notin (N: K)$ akan ditunjukkan $b \in (N: K)$. Karena N submodul prima lemah, $a \notin (N: K)$ yang berarti $aK \nsubseteq N$ diperoleh $bK \subseteq N$. Jadi $b \in (N: K)$.

Teorema 3(Azizi, 2006)

Misal M suatu R-modul dan N submodul sejati di M, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

(i) *Submodul N merupakan submodul prima lemah.*

(ii) *Untuk setiap $x, y \in M$, jika $(N: x) \neq (N: y)$ maka $N = (N + Rx) \cap (N + Ry)$ dengan $(N: x) = \{r \in R \mid rx \in N\}$ dan $(N: y) = \{r \in R \mid ry \in N\}$.*

Bukti

(i) $\Longrightarrow$ (ii):

Misalkan M suatu R-modul dan N merupakan submodul prima lemah di M. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in M$, jika $(N: x) \neq (N: y)$ maka $N = (N + Rx) \cap (N + Ry)$. Diambil sebarang $x, y \in M$ dengan $(N: x) \neq (N: y)$ dan misalkan $r \in (N: x)\backslash(N: y)$. Karena N submodul prima lemah dan $y \in M$ maka berdasarkan Lemma 1 diperoleh $(N: y)$ merupakan ideal prima, lebih lanjut dapat pula ditunjukkan bahwa $(N: y) = (N: ry)$. Kemudian, diambil sebarang $a \in (N + Rx) \cap (N + Ry)$ yang berarti bahwa $a \in (N + Rx)$ dan $a \in (N + Ry)$ sehingga diperoleh $a = n_1 + r_1x$ dan $a = n_2 + r_2y$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N$ dan $r_1, r_2 \in R$. Diperhatikan bahwa, $ra = r(n_1 + r_1x) = rn_1 + r(r_1x) = rn_1 + r_1(rx) \in N$. Di lain pihak, $ra = r(n_2 + r_2y) = rn_2 + r(r_2y) = rn_2 + r_2(ry) \in N$,diperoleh $r_2(ry) = ra + (-rn_2) \in N$. Hal ini berarti $r_2 \in (N: ry) = (N: y)$, akibatnya $r_2y \in N$. Karena $r_2y \in N$ maka dapat diperoleh $a = n_2 + r_2y \in N$. Jadi $(N + Rx) \cap (N + Ry) \subseteq N$.

Selanjutnya, diambil sebarang $a \in N$, karena $0_R \in R$ maka $a = n_1 + 0_Rx \in (N + Rx)$ dan juga $a = n_2 + 0_Ry \in (N + Ry)$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N$, sehingga diperoleh $a \in (N + Rx)$ dan $a \in (N + Ry)$, akibatnya $a \in (N + Rx) \cap (N + Ry)$. Jadi $N \subseteq (N + Rx) \cap (N + Ry)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i):

Misal M suatu R-modul dan untuk setiap $x, y \in M$ dengan $(N: x) \neq (N: y)$ maka berakibat $N = (N + Rx) \cap (N + Ry)$. Akan dibuktikan N merupakan submodul prima lemah. Diambil sebarang $a \in M$, $r_1, r_2 \in R$ dengan $r_1r_2a \in N$ dan $r_1a \notin N$. Karena $r_1r_2a \in N$ dan $r_1a \notin N$ maka $r_1 \in (N: r_2a)\backslash(N: a)$, jadi $(N: r_2a) \neq (N: a)$. Pilih $x = r_2a$ dan $y = a$, dari yang diketahui diperoleh $N = (N + Rr_2a) \cap (N + Ra)$. Selanjutnya, pilih $0_N \in N$, dan $1_R \in R$, maka $r_2a = 0_N + 1_Rr_2a \in (N + Rr_2a)$, pilih $r_2 \in R$ maka $r_2a = 0_N + r_2a \in (N + Ra)$ diperoleh $r_2a \in (N + Rr_2a)$ dan $r_2a \in (N + Ra)$. Jadi $r_2a \in (N + Rr_2a) \cap (N + Ra) = N$.

Akibat 3.1 (Azizi, 2006)

Misalkan M suatu R-modul dan N merupakan submodul prima lemah dari M, jika $x, y \in M$ dan $r \in R$ dengan $rx \in N$, maka $N = (N + Rx) \cap (N + Rry)$.

Bukti

Diberikan suatu M R-modul dan N submodul prima lemah dari M. Misalkan $x, y \in M, r \in R$, dan $rx \in N$. Akan dibuktikan $N = (N + Rx) \cap (N + Rry)$. Jika $ry \in N$, maka jelas bahwa $N = (N + Rx) \cap (N + Rry)$. Jika $ry \notin N$, maka $(N: x) \neq (N: y)$. Diambil sebarang $a \in N$, perhatikan bahwa $a = n_1 + 0_Rx \in (N + Rx)$ dan $a = n_2 + 0_Rry \in (N + Rry)$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N$. Akibatnya, $a \in (N + Rx) \cap (N + Rry)$. Jadi $N \subseteq (N + Rx) \cap (N + Rry)$.

Selanjutnya, diambil sebarang $a \in (N + Rx) \cap (N + Rry)$ yang artinya $a \in (N + Rx)$ dan juga $a \in (N + Rry)$, maka diperoleh $a = n_1 + r_1x$ dan $a = n_2 + r_2ry$ untuk suatu $n_1, n_2 \in N$ dan $r_1, r_2 \in R$. Diperhatikan bahwa, $a = n_2 + r_2ry = n_2 + (r_2r)y \in (N + Ry)$, jadi berdasarkan

Teorema 7 diperoleh $a \in (N + Rx) \cap (N + Rry) \subseteq (N + Rx) \cap (N + Ry) = N$, akibatnya, $(N + Rx) \cap (N + Rry) \subseteq N$.

Teorema 4

Misal M suatu R-modul dan N merupakan submodul sejati di M, jika N merupakan submodul prima maka N juga merupakan submodul prima lemah.

Bukti

Misal M suatu R-modul dan N submodul prima di M R-modul. Akan dibuktikan N merupakan submodul prima lemah. Diambil sebarang submodul K di M, $a, b \in R$, dengan $abK \subseteq N$. Karena $abK \subseteq N$, diperoleh $abk \in N$, $\forall k \in K$. Selanjutnya, karena N submodul prima di M dan $abk = a(bk) \in N$, $\forall k \in K$ maka $bk \in N$, $\forall k \in K$ atau $a \in (N: M)$. Jika berlaku $bk \in N$, $\forall k \in K$, jelas bahwa $bK \subseteq N$. Jika berlaku $a \in (N: M)$, artinya $aM \subseteq N$ sehingga diperoleh $am \in N$, $\forall m \in M$. Karena $K \subseteq M$ secara otomatis $aK \subseteq N$ terpenuhi

KESIMPULAN

Pada penelitan ini dibuktikan lebih lengkap tentang sifat-sifat submodul prima dan submodul prima lemah sesuai dengan yang dipaparkan terlebih dahulu oleh Dauns (1978) dan Azizi (2006). Selain itu, didapatkan pula hubungan antara keduanya, yaitu setiap submodul prima merupakan submodul prima lemah. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian yang lebih khusus, misalnya penelitian mengenai submodul prima dan submodul prima lemah dalam modul perkalian atau pun dalam modul artin dan modul noetherian.

DAFTAR PUSTAKA

Atani, S. E.& F. Farzalipour. (2007). On Weakly Prime Submodules. *Tamkang Journal Of Mathematics, 38(3)*, 247-252.

Azizi, A. (2006). Weakly Prime Submodules and Prime Submodules. *Glasgow Mathematical Jurnal Trust*, *48*, 343-346.

Behboodi, M. & H. Koohy. (2004). Weakly Prime Modules. *Vietnam Journal of Mathematics, 32:2*, 185-195.

Dauns, J. (1978). Prime Modules. *Journal für Mathematik*, *298*, 156-181.

Hadi, I. (2009). On Weakly Prime Submodules. *Ibn Al-Haitam Journal for Pure and Applied Science, 22(3)*, 183-190.

Khusnawati, L. D. (2017). Submodul Prima, Semi Prima, dan Primer di Modul dan Modul Fraksi. *Jurnal Gammath*, *2(1)*, 1-10.

Lu, C. P. (1984). Prime Submodule of Modules. *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli, 3(1)*, 61-69.