Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 173 – 182)
Vol. 2. No. 2, Oktober 2019
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Solusi Persamaan Transport dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Wahidah Sanusi[1], Syafruddin Side[1], dan Beby Fitriani[1, a)]

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224*

[a)]bebyfitriani2897@gmail.com

***Abstrak**. Penelitian ini mengkaji terbentuknya persamaan Transport dan menerapkan metode Dekomposisi Adomian Laplace dalam menentukan solusi persamaan Transport. Persamaan transport merupakan salah satu bentuk dari persamaan diferensial parsial. Bentuk umum persamaan Transport yaitu:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Metode Dekomposisi Adomian Laplace merupakan kombinasi antara dua metode yaitu metode dekomposisi adomian dan transformasi laplace. Penyelesaian persamaan Transport dengan metode Dekomposisi Adomian Laplace dilakukan dengan cara menggunakan tranformasi Laplace, mensubstitusi nilai awal, menyatakan solusi dalam bentuk deret tak hingga dan menggunakan invers transformasi laplace . Metode ini juga merupakan metode semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier. Berdasarkan hasil perhitungan, metode dekomposisi Adomian Laplace dapat menghampiri penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear.
***Kata Kunci:** Metode Dekomposisi Adomian Laplace, Persamaan Diferensial Parsial, Persamaan Transport.*

***Abstract.** This research discusses the solving of Transport equation applying Laplace Adomian Decomposition Method. Transport equation is one form of partial differential equations. General form of Transport equation is:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Laplace Adomian Decomposition Method that combine between Laplace transform and Adomian Decomposition Method. The steps used to solve Transport equation are applying Laplace transform, initial value substitution, defining a solution as infinite series, then using the inverse Laplace transform. This method is a semi analytical method to solve for nonlinear ordinary differential equation. Based on the calculation results, the Laplace Adomian decomposition method can solve the solution of nonlinear ordinary differential equation.
***Keywords:** Laplace Adomian Decomposition Method, Partial Differential Equation, Transport Equation.*

PENDAHULUAN

Persamaan transport merupakan salah satu persamaan gelombang yang menggambarkan mekanisme transportasi suatu substansi yang mengalir dalam fluida dengan arah tertentu (aliran fluida). Persamaan transport juga persamaan yang menjelaskan fenomena fisika dimana partikel, energi, atau kuantitas fisika lainnya ditransfer ke dalam suatu sistem fisika karena proses adveksi dan difusi. Penurunan persamaan transport diperoleh berdasarkan hukum kekekalan massa (Paskalia, 2018).

Beberapa penelitian telah mencoba mencari solusi persamaan transport dengan berbagai metode (Setiawan & Widowati, 2011; Sampera & Apriansyah, 2016; Apsari, Syafwan, & Baqi, 2018). Setiawan & Widowati (2011) menyelesaikan solusi persamaan transport dan distribusi anomiak menggunakan transformasi Laplace. Sampera & Apriansyah (2016) mengkaji tentang penyelesaian persamaan transport kasus adveksi-difusi 2D pada sebaran polutan menggunakan aplikasi metode beda hingga Crank-Nicholson Implisit. Apsari, dkk (2018) mengkaji tentang penyelesaian persamaan transport dengan adveksi nonlokal menggunakan metode karakteristik. Penelitian ini mengambil contoh kasus masalah nonlokal yang dapat ditemukan pada proses pencernaan makanan di dalam usus.

Persamaan transport dapat diselesaikan dengan sebuah metode yang dikenalkan oleh George Adomian seorang matematikawan dari Amerika. Metode tersebut lebih dikenal dengan Metode Dekomposisi Adomian. Pada metode ini, persamaan diferensial ditulis dalam bentuk persamaan operator. Operator yang digunakan merupakan operator diferensial. Selanjutnya, operator diferensial pada Metode Dekomposisi Adomian diganti dengan operator transformasi Laplace $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ dan invers dari operator $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ adalah invers transformasi Laplace $\boldsymbol{L^{-1}}$. Sehingga, metode ini disebut Metode Dekomposisi Adomian Laplace (Jaradat, 2008).

Beberapa penelitian telah menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace (Adawiyah, 2016; Yulida, 2012; Wartono, 2013). Adawiyah (2016) menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan gelombang kejut (shock wave). Yulida (2012) menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk solusi persamaan diferensial nonlinear dengan koefisien. Wartono (2013) menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk persamaan Riccati. Pada penelitian ini akan membahas tentang solusi persamaan transport dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace. Persamaan transport yang digunakan yaitu persamaan adveksi dimensi satu.

KAJIAN PUSTAKA

Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas. Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu turunan parsial. Terdapat persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier. Beberapa penelitian yang menggunakan persamaan diferensial parsial untuk melakukan penelitian yaitu Arisandi (2017) mengkaji persamaan panas dimensi satu, Wartono (2013) meneliti mengenai persamaan Riccati. Sehingga, pada artikel ini membahas mengenai persamaan diferensial parsial yaitu persamaan transport.

Masalah Nilai Awal

Dalam kebanyakan permasalahan, penyelesaian unik bagi satu masalah yang diberikan yang kemudian disebut satu penyelesaian khusus, adalah diperoleh dari satu penyelesaian umum mengikuti satu syarat awal $y(x_0) = y_0$ dengan diberikan nilai-nilaix_0 dan y_0 yang digunakan untuk menentukan skalar hasil dari penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Syarat awal adalah syarat yang dikhususkan pada satu titik yang diberikan. Bilangan syarat awal tak bebas pada peringkat persamaan diferensial. Satu persamaan diferensial biasa dengan satu syarat awal disebut masalah nilai awal [MNA]. Jadi, jika secara jelas satu persamaan diferensial biasa diberikan oleh $y' = f(x, y)$, maka masalah nilai awal diberikan oleh:

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

Masalah nilai awal dan berhubungan dengan solusi persamaan differensial secara khusus dimana kondisi awal yang diberikan merupakan syarat awal sehingga mendapatkan solusi dari persamaan tersebut (Sugiyarto, 2015).

Persamaan Transport

Persamaan transport merupakan salah satu persamaan gelombang yang menggambarkan mekanisme transportasi suatu substansi yang mengalir dalam fluida dengan arah tertentu (aliran fluida). Persamaan transport dalam meteorologi dan oseanografi fisik, transport mengacu pada gerak substansi atmosfer atau laut, seperti panas, kelembaban, dan salinitas (kadar garam). Penurunan persamaan transport yaitu berdasarkan hukum kekekalan massa.

Bentuk umum persamaan transport adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Transformasi Laplace

Transformasi laplace dapat diterapkan sebagai metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik sebagai masalah nilai awal maupun masalah nilai batas. (Wahidah, Wahyuni & Ratnasari, 2015).

Definisi 1. (Wahidah, dkk, 2015)

Misalkan $\mathrm{f(t)}$ suatu fungsi dari t yang ditentukan untuk $\mathrm{t} > 0$. Maka transformasi Laplace dari $\mathrm{f(t)}$, yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{\mathrm{f(t)}\}$, didefinisikan sebagai,

$$\mathcal{L}\{\mathrm{f(t)}\} = \mathrm{F(s)} = \int_0^\infty \mathrm{f(t)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\mathrm{dt}$$

Definisi 2. (Wahidah, dkk, 2015)

Jika transformasi laplace suatu fungsi f(t) adalah F(s), yaitu $\mathcal{L}\{\mathrm{f(t)}\} = \mathrm{F(s)}$ maka $\mathrm{f(t)}$ dinamakan invers transformasi Laplace dari $\mathrm{F(s)}$ dan dinotasikan dengan $\mathrm{f(t)} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{F(s)}\}$ dengan L^{-1} disebut operator invers Transformasi Laplace.

Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Diberikan persamaan diferensial yang dinotasikan dalam persamaan operator :

$$\mathbf{Ly + Ry + Ny = G} \tag{1}$$

Dengan N adalah operator nonlinear dan L adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi R yang diasumsikan dapat dibalik (invertible), R adalah operator diferensial linear dari orde yang kurang dari L dan G suku nonhomogen.

Persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$\mathbf{Ly = G - Ry - Ny} \tag{2}$$

Selanjutnya jika persamaan (2) menggunakan operator L^{-1} diperoleh

$$\mathbf{y = h + L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny} \tag{3}$$

Dengan h adalah solusi persamaan homogeny Ly = 0 dengan nilai awal atau nilai batas yang diketahui. Kemudian Adomian mendefinisikan solusi y sebagai jumlahan deret tak hingga yaitu

$$\mathbf{y} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{y_n}, \tag{4}$$

Masalah lebih lanjut adalah pada dekomposisi suku nonlinier Ny, Adomian mendefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{N(y)} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{A_n} \tag{5}$$

dengan

$$\mathbf{A_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n!}}\left[\frac{\mathbf{d^n}}{\mathbf{d\lambda^n}}\mathbf{N}\sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty}\mathbf{y_k\lambda^k}\right]_{\boldsymbol{\lambda=0}}$$

Selanjutnya komponen A_n disebut polinomial Adomian, didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{A_0 = N(y_0)}$$
$$\mathbf{A_1 = u_1N'(y_0)}$$
$$\mathbf{A_2 = u_2N'(y_0) + \frac{u_1^2}{2}N''(y_0)}$$
$$\mathbf{A_3 = u_3N'(y_0) + u_1u_2N''(y_0) + \frac{u_1^3}{3!}N'''(y)}$$
$$\vdots$$

Selanjutnya menggunakan Persamaan (3) dan (4) diperoleh :

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\mathbf{y_n} = \mathbf{h + L^{-1}G - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny} \tag{6}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (4) dan (5) ke Persamaan (6) diperoleh :

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\mathbf{y_n} = \mathbf{h + L^{-1}G - L^{-1}R}\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\mathbf{y_n} - \mathbf{L^{-1}}\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty}\mathbf{A_n}$$

Lebih lanjut, Persamaan (6) dapat diuraikan yaitu

$$\mathbf{y_0 = h + L^{-1}G}$$

Dan

$$\mathbf{y_n = -L^{-1}(Ry_{n-1}) - L^{-1}(A_{n-1}), n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Kelebihan dari metode dekomposisi Adomian Laplace yaitu solusi yang diperoleh lebih sederhana dalam bentuk deret tak hingga (Jaradat, 2008).

METODe PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori. Tujuan penelitian ini untuk mengetahui solusi dari persamaan transport menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace. Penelitian ini dilakukan dengan menurunkan persamaan transport yang diperoleh berdasarkan hukum kekakalan massa. Selanjutnya, mencari solusi persamaan transport dengan metode Dekomposisi Adomian Laplace. Metode Dekomposisi Adomian Laplace yang digunakan terdiri dari empat langkah yaitu menerapkan transformasi Laplace pada persamaan transport, mensubstitusikan nilai awal, menyatakan solusi dalam bentuk deret tak hingga dan menggunakan invers transformasi laplace untuk mendapatkan solusi umum.

Hasil PENELITIAN

Prosedur Matematis Persamaan Transport

Dalam menurunkan persamaan hukum kekakalan massa, notasi yang akan digunakan yaitu x menyatakan variabel jarak, t menyatakan variabel waktu. Sedangkan untuk menyatakan konsentrasi polutan dan kecepatan pada posisi x dan waktu t adalah $u(x, t)$ dan $c(x, t)$.
Terdapat beberapa asumsi yang digunakan untuk menurunkan persamaan hukum kekekalan massa. Pertama, diasumsikan aliran berada dalam dimensi satu dan hanya melibatkan variabel ruang x saja pada waktu t. Kedua, diasumsikan aliran tenang tanpa gangguan dari luar dan kecepatan diabaikan. Ketiga, diasumsikan tempat air kedap atau tertutup rapat. Oleh karena itu,

karena massa adalah kekal, maka massa hanya akan berubah karena aliran bergerak melewati titik x_1 dan x_2. Massa total pelacak kimia pada selang $[x_1,x_2]$ pada waktu t dapat dinyatakan dengan:

$$M = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx$$

Perubahan massa pada $[x_1,x_2]$ diberikan dengan perbedaan fluks pada $[x_1,x_2]$. Misal $F_i(t)$ adalah posisi pelacak melewati titik x_i untuk $i = 1,2$. Saat $F_i(t) > 0$ berarti pelacak mengalir ke kanan. Saat $F_i(t) < 0$ berarti pelacak mengalir ke kiri, untuk setiap $|F_i(t)|$ dalam satuan gram per detik. Perubahan massa pada $[x_1,x_2]$ berubah hanya saat flux melewati x_1 dan x_2, diberikan oleh

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = F_1(t) - F_2(t)$$

(7)

Laju aliran yang melalui setiap titik (x,t) yang merupakan hasil kali massa jenis $u(x,t)$ dan kecepatan $c(x,t)$ disebut fluks massa, yaitu:

$$\text{Fluks massa} = c(x,t)u(x,t)$$

(8)

Disini, kecepatan menggambarkan seberapa cepat partikel yang bergerak melewati titik x, dan massa jenis u menggambarkan berapa banyak partikel kimia yang terkandung dalam aliran disetiap x. Misalnya $c(x,t)$adalah fungsi yang diketahui, sehingga persamaan (8) dapat dinyatakan menjadi

$$\text{Fluks massa} = f(u,x,t) = c(x,t)u$$

Karena nilai fluks $f(u)$ bergantung pada nilai u, maka persamaan (7) dapat ditulis menjadi

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

(9)

$$= -f(u(x,t))\big|_{x_1}^{x_2}$$

Jika u dan f adalah fungsi yang terdiferensial maka persamaan (9) dapat ditulis menjadi

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t))dx = 0$$

(10)

Dengan menggunakan sifat integral tentu, persamaan (10) dapat ditulis menjadi

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t))\right] dx = 0$$

(11)

Persamaan (11) menyatakan bahwa nilai integral dari beberapa jumlah selalu nol untuk setiap nilai limit yang bebas dari integral.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t))dx = 0$$

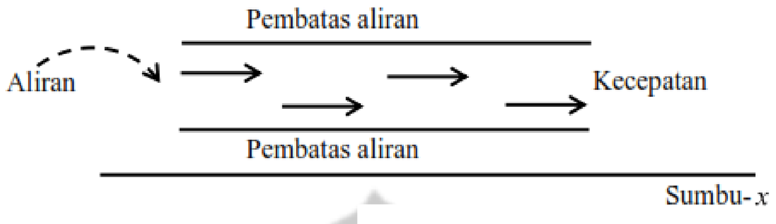
Atau dapat dituliskan menjadi

$$u_t + f(u)_x = 0$$

(12)

Persamaan (12) disebut persamaan hukum kekekalan massa.

Dalam proses adveksi, diandaikan sebuah aliran yang terbatas mengalir dengan kecepatan aliran konstan, seperti diilustrasikan pada (Gambar 1).



GAMBAR 1. Aliran sempit mengalir dengan kecepatan konstan

Andaikan terdapat sebuah polutan dan aliran dan polutan tersebut terbawa ke hilir tanpa adanya proses difusi sedikitpun. Berarti, kecepatan $c(x,t)$ adalah konstan. Fluks massa pada persamaan (8) dapat ditulis menjadi:

$$\text{Fluks massa} = f(u) = c(u)$$

Dari persamaan (12) diperoleh

$$u_t + (cu)_x = 0$$

(13)

Persamaan (13) disebut persamaan transport.

Solusi Persamaan Transport dengan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Dari hasil pemodelan persamaan transport (13) dapat ditulis sebagai :

$$u_t + cu_x = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(14)

Dengan nilai awal pada persamaan transport dapat ditulis sebagai :

$$u(x,0) = f(x)$$

Dalam menentukan solusi dari persamaan (14), digunakan langkah-langkah berikut :

1. Menggunakan Transformasi Laplace pada persamaan (14)

   Transformasi Laplace dari turunan pertama adalah $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}\,u(x,t)\Big|_0^P - \int_0^P (-s)e^{-st}\,u(x,t)\,dt\right\} \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}\,u(x,t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt\right\} \\
&= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-sP}\,u(x,P) - e^{-s0}\,u(x,0) + s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt\right\} \\
&= \lim_{P\to\infty} e^{-sP}\,u(x,P) - \lim_{P\to\infty} e^{-s0}\,u(x,0) + \lim_{P\to\infty} s\int_0^P e^{-st}\,u(x,t)\,dt \\
&= 0 - u(x,0) + s\int_0^\infty e^{-st}\,u(x,t)\,dt
\end{aligned}$$

$$= s\int_0^\infty e^{-st}\, u(x,t)\, dt - u(x,0)$$
$$= s\, u(x,s) - u(x,0)$$

Dari uraian diatas, maka Transformasi Laplace dari turunan pertama sebuah fungsi adalah

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\, u(x,s) - u(x,0)$$

Untuk Transformasi Laplace pada ruas kanan persamaan (14) digunakan aturan Leibnitz , sehingga diperoleh :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial x}\, dt$$
$$= \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}\, u\, dt$$
$$= \frac{d(u(x,s))}{dx}$$

Sehingga, $\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d(u(x,s))}{dx}$

Maka diperoleh transformasi Laplace dari persamaan (14)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} + c\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0$$

$$s\, u(x,s) - u(x,0) + c\,\frac{d(u(x,s))}{dx} = 0$$
(15)

2. Substitusi nilai awal

   Selanjutnya substitusi nilai $u(x,0) = f(x)$ pada persamaan (15) :

$$s\, u(x,s) - f(x) = -c\left(\frac{d(u(x,s))}{dx}\right)$$
$$s\, u(x,s) = f(x) - c\left(\frac{d(u(x,s))}{dx}\right)$$
$$u(x,s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{c}{s}\left(\frac{d(u(x,s))}{dx}\right)$$
(16)

3. Menyatakan solusi dalam bentuk deret tak hingga $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

   Metode Dekomposisi Adomian mendefinisikan solusi dalam bentuk deret tak hingga, yaitu $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ dengan u_n dihitung secara rekursif.

   Hasil yang diperoleh pada persamaan (16) dinyatakan dalam solusi bentuk deret tak hingga $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

$$u(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{c}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,s)\right)\right)$$

Diperoleh,

$$u_0(x,s) \; = \frac{f(x)}{s}$$

$$u_1(x,s) \; = -\frac{c}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)$$

$\vdots$

$$u_{n+1}(x,s) = (-1)^{n+1}\frac{c^{(n+1)}}{s^{(n+1)}}\left(\frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}}u_0(x,s)\right) \qquad ,n \geq 0$$

Sehingga,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{c}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + \frac{c^2}{s^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) - \frac{c^3}{s^3}\left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + \frac{c^4}{s^4}\left(\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{c^{(n+1)}}{s^{(n+1)}}\left(\frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}}u_0(x,s)\right)$$

Yang menghasilkan

$$u(x,s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{c}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + \frac{c^2}{s^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) - \frac{c^3}{s^3}\left(\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + \frac{c^4}{s^4}\left(\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right) + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{c^{(n+1)}}{s^{(n+1)}}\left(\frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}}u_0(x,s)\right) \tag{17}$$

4. Menggunakan invers Transformasi Laplace

Berdasarkan langkah 3 telah diperoleh, $u(x,s)$ seperti pada persamaan (17). Selanjutnya untuk memperoleh $u(x,t)$ digunakan invers transformasi Laplace

$$u_0(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right\} = f(x)$$

$$u_1(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{c}{s}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right\} = -c\frac{t}{1!}\frac{\partial}{\partial x}u_0$$

$$u_2(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c^2}{s^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right\} = c^2\frac{t^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,t) &= (-1)^{n+1}c^{n+1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{(n+1)}}\left(\frac{d^{(n+1)}}{dx^{(n+1)}}\left(\frac{f(x)}{s}\right)\right)\right\} \\ &= (-1)^{n+1}c^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial x^{(n+1)}}u_0 \qquad ,n \geq 0 \end{aligned}$$

Jadi , solusi umum persamaan transport adalah

$$u(x,t) = f(x) - c\frac{t}{1!}\frac{\partial}{\partial x}u_0 + c^2\frac{t^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0 - c^3\frac{t^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0 + c^4\frac{t^4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0 \ldots + (-1)^{n+1}c^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial x^{(n+1)}}u_0$$

Pembahasan

Penelitian tentang persamaan transport dengan metode transformasi Laplace, telah dilakukan oleh Setiawan dan Widowati (2010). Penelitian ini mengkaji persamaan transport dan distribusi anomiak yang diterapkan pada metode Transformasi Laplace. Penelitian Wartono (2013) dan Adawiyah (2016) menerapkan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. Wartono (2013) mengkaji tentang penerapan metode Dekomposisi Adomian Laplace dalam mencari solusi persamaan Riccati. Adawiyah (2016) mengkaji tentang penerapan metode Dekomposisi Adomian Laplace dalam mencari solusi persamaan gelombang kejut (*Shock Wave*).

Sedangkan pada penelitian ini mengkaji solusi umum dari persamaan transport yang diterapkan pada metode Dekomposisi Adomian Laplace. Hasil dari penelitian ini yaitu berupa fungsi matematik yang berbentuk $u(x,t)$, dengan x dan t adalah konsentrasi polutan dalam posisi x dan waktu t . Sehingga dengan mensubstitusi nilai pada t akan diketahui nilai konsentrasi polutan yang ada pada aliran.

Kesimpulan

1. Solusi umum dari persamaan transport yang diperoleh pada penelitian ini adalah
$$u(x,t) = f(x) - c\frac{t}{1!}\frac{\partial}{\partial x}u_0 + c^2\frac{t^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0 - c^3\frac{t^3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_0 + c^4\frac{t^4}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0 +$$
$$\dots + (-1)^{n+1}c^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial x^{(n+1)}}u_0$$
2. Hasil yang diperoleh yaitu semakin besar nilai t maka konsentrasi polutannya semakin rendah yang artinya semakin bertambahnya waktu laju aliran maka waktu bakteri pada polutan semakin lama sehingga polutan lebih banyak terurai.
3. Pada penelitian ini berfokus pada persamaan transport dengan metode Dekomposisi Adomian Laplace sehingga memberikan rekomendasi untuk mengembangkan persamaan transport dengan menerapakan pada metode yang berbeda seperti metode transformasi koordinat dan metode beda hingga.

Daftar Pustaka

Adawiyah, R. (2016). *Penyelesaian Persamaan Shock Wave Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace*. (Skripsi). Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Apsari, I.C., Syafwan, M., Baqi, A.I. (2018). Penyelesaian Persamaan Adveksi Non Lokal Dalam Kasus Domian Satu Dimensi Dengan Menggunakan Metode Karakteristik. *Jurnal Matematika UNAND*, *Vol VII* (1). 76-84.

Arisandi, R. (2017). *Solusi Persamaan Panas dengan Metode Dekomposisi Adomian Laplace*. (Skripsi). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar.

Jaradat, O.K., 2008. Adomian Decomposition Method for solving Abelian Differential Equations, *Journal of Applied Sciences* 8(10) : 1962-1966.

Paskalia, M. (2018). *Penyelesaian Numeris Persamaan Adveksi-Difusi Menggunakan Metode Beda Hingga*. (Skripsi). Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.

Sampera , H & Apriansyah (2016). Aplikasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Implisit untuk Menentukan Kasus Adveksi-Difusi 2D pada Sebaran Polutan Di Suatu Perairan. *Jurnal Prisma Fisika, Vol IV* (02). 56-63.

Setiawan, I & Widowati. (2011). *Solusi Analitik Persamaan Transport dan Distribusi Anomiak*. (Skripsi). Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

Sugiyarto. 2015. *Persamaan Diferensial.* Edisi 1. Binafsi Publisher. Yogyakarta.

Wahidah,Wahyuni & Ratnasari. (2015). Fungsi Green yang dikonstruksi pada Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Orde-n. *Jurnal MSA* . 3.1.

Wartono, M. (2013). Penyelesaiaan Persamaan Riccati dengan menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Sains, Teknologi, dan Industri*. 10.2.

Yulida, Y. (2012). Metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk Solusi Persamaan Diferensial Nonlinear Koefisien Fungsi. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan, 6(1).* 17-26.