Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 9– 18)
Vol. 2. No. 2, Oktober 2019
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Aplikasi Ring Kuadratik dalam Menyelesaikan Persamaan *Pell*

Utami Priono[1, a)], Wahidah Sanusi[1], dan Muhammad Abdy[1]

[1] *Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar, 90224*

[a)]utamipriono@yahoo.com

Abstrak. *Artikel ini membahas tentang penerapan Metode ring* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ *(kuadratik) dalam mencari solusi pada persamaan Pell. Persamaan Pell merupakan bagian dari persamaan Diophantine non linear yang penyelesaiannya berupa bilangan bulat dengan bentuk umum persamaannya yaitu* $x^2 - dy^2 = \pm N$. *Dalam penelitian ini persamaan Pell yang akan ditentukan solusinya yaitu* $x^2 - dy^2 = \pm 9$. *Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode ring kuadratik. Metode ring kuadratik yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan Pell memperhatikan konsep norm dan unit pada bilangan* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. *Berdasarkan hasil penelitian, persamaan Pell positif* $x^2 - dy^2 = 9$ *memiliki paling tidak satu solusi dengan nilai* d *yang dipilih. Sedangkan persamaan Pell negatif* $x^2 - dy^2 = -9$ *tidak selalu memiliki solusi, hanya pada nilai* d *tertentu.*
Kata Kunci: *Persamaan Pell, Ring Kuadratik, Norm*

Abstract. *This article discusses the application of the ring* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ *(quadratic) method in finding solutions of the Pell equation. The Pell equation is part of the non linear Diophantine equation whose the solution is integer with the general form of the equation is* $x^2 - dy^2 = \pm N$. *In this research, the Pell equation which the solution will be determined is* $x^2 - dy^2 = \pm 9$. *The method used in this research is the quadratic ring method. The quadratic ring method that will be used in solving the Pell equation takes the concepts of norm and unit in* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ *number. Based on this research, positive Pell equations is* $x^2 - dy^2 = 9$ *has at least one solution with the value of* d *that chosen. While the negative Pell equation is* $x^2 - dy^2 = -9$ *doesn't always have a solution, just at certain values of* d.
Keywords: *Pell Equation, Quadratic Ring, Norm.*

PENDAHULUAN

Dalam teori bilangan dipelajari suatu persamaan, yaitu persamaan *Diophantine*. Persamaan *Diophantine* merupakan persamaan polynomial (dengan n peubah) yang mensyaratkan solusinya berupa bilangan bulat. *Diophantine* terbagi menjadi dua, yaitu persamaan *Diophantine* linear dan persamaan *Diophantine* nonlinear tergantung pada pangkat variabelnya. Bentuk persamaan *Diophantine* non linear seperti persamaan kuadrat, kubik, persamaan *Phytagoras*, Persamaan *Bachet*, Persamaan *Pell*, dan lain sebagainya.

Penelitian ini menggunakan Persamaan *Diophantine* non linear, yaitu persamaan *Diophantine* kuadrat dengan dua peubah. Persamaan *Diophantine* kuadrat tersebut mempunyai bentuk umum $x^2 - dy^2 = N$, dimana d adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, dan untuk setiap N merupakan bilangan bulat tak nol. Persamaan *Diophantine* kuadrat tersebut juga dikenal dengan Persamaan *Pell*. Salah satu aplikasi persamaan *Pell* yaitu dalam bidang

kriptografi, seperti penelitian yang dilakukan oleh Asha N (2014), yang berjudul *Enforced Cinviction in Cryptographic Provenance Across Critical System Information*.

Bilangan kuadratik dinotasikan dengan $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, dimana $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+, d \neq a^2\}$. Dengan operasi penjumlahan yang didefinisikan dengan,

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) + (a_2 + b_2\sqrt{d}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{d}$$

dan operasi perkalian pada bilangan kuadratik yang didefinisikan dengan,

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) * (a_2 + b_2\sqrt{d}) = (a_1a_2 + b_1b_2d) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{d}$$

maka ($\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$,+,*) merupakan suatu ring.

Beberapa peneliti telah membahas mengenai penyelesaian persamaan *Pell* (Rafika, 2014; Robertson, 2004; Tekcan, 2007) maupun metode ring (Dewi, 2016). Robertson (2004) meneliti tentang persamaan *Pell* yang diselesaikan dengan metode siklik, sistem *Lagrange* reduksi, algoritma *Lagrange Matthews Mollin* (LMM), bentuk biner kuadrat dan metode Algoritma PQa. Rafika (2014) menyelesaikan persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = \pm 4$ dengan metode pecahan berulang dan metode matriks. Kemudian Dewi (2016) meneliti tentang persamaan *Diophantine* non linear yang diselesaikan dengan mengaplikasikan ring $\mathbb{Z}[i]$, namun pada penelitian ini peneliti menggunakan ring kuadratik atau ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Penelitian ini membahas mengenai bagaimana langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = \pm 9$ dengan menggunakan metode ring kuadratik. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan atau mencari solusi x dan y pada bilangan bulat yang memenuhi persamaan $x^2 - dy^2 = \pm 9$ dengan menggunakan metode ring kuadratik.

Untuk dapat menyelesaikan persamaan *Pell* menggunakan metode ring kuadratik, diberikan konsep norm dan unit pada ring kuadratik berikut.

Definisi 1 (Kline, 2014)

Misal $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, dimana $\alpha = (a + b\sqrt{d})$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ maka diperoleh konjugat dari α adalah $\bar{\alpha}$, dimana $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$.

Definisi 2 (Kline, 2014)

Untuk ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, dimana d adalah bilangan bulat positif bukan kuadrat sempurna, norm dari $\alpha \in R$ didefinisikan sebagai $N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$.

Definisi 3 (Clark, 2009)

Misalkan $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. α dikatakan unit dari $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ jika dan hanya jika $N(\alpha) = 1$.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian murni, dimana metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji sumber pustaka atau literatur-literatur yang berkaitan dengan persamaan *Pell* dan mengenai ring kuadratik. Dalam menyelesaikan persamaan *Pell*, digunakan konsep norm dan unit pada ring kuadratik. Untuk mencari solusi persamaan *Pell* tersebut digunakan teorema yang diperoleh dari konsep norm dan unit pada ring kuadratik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian Persamaan *Pell* dengan menggunakan Metode Ring Kuadratik

Dalam menyelesaikan persamaan *Pell* dengan metode ring kuadratik dibutuhkan solusi awal yang telah diketahui, maka beberapa solusi awal dari persamaan *Pell* tersebut dapat dilihat pada Tabel 1 dengan nilai d yang diberikan, yang diperoleh dari hasil perhitungan dengan menggunakan Aplikasi *Microsoft Office Excel 2010*.

TABEL 1 Solusi Awal Persamaan $x^2 - dy^2 = \pm 9$

d	$x^2 - dy^2 = 9$	Solusi (x_1, y_1)	$x^2 - dy^2 = -9$	Solusi (x_1, y_1)
2	$x^2 - 2y^2 = 9$	$(9,6)$	$x^2 - 2y^2 = -9$	$(3,3)$
3	$x^2 - 3y^2 = 9$	$(6,3)$	$x^2 - 3y^2 = -9$	–
5	$x^2 - 5y^2 = 9$	$(27,12)$	$x^2 - 5y^2 = -9$	$(6,3)$
6	$x^2 - 6y^2 = 9$	$(15,6)$	$x^2 - 6y^2 = -9$	–
7	$x^2 - 7y^2 = 9$	$(4,1)$	$x^2 - 7y^2 = -9$	–
8	$x^2 - 8y^2 = 9$	$(9,3)$	$x^2 - 8y^2 = -9$	–
10	$x^2 - 10y^2 = 9$	$(7,2)$	$x^2 - 10y^2 = -9$	$(1,1)$
11	$x^2 - 11y^2 = 9$	$(30,9)$	$x^2 - 11y^2 = -9$	–
12	$x^2 - 12y^2 = 9$	$(21,6)$	$x^2 - 12y^2 = -9$	–
13	$x^2 - 13y^2 = 9$	$(29,8)$	$x^2 - 13y^2 = -9$	$(2,1)$
14	$x^2 - 14y^2 = 9$	$(45,12)$	$x^2 - 14y^2 = -9$	–
15	$x^2 - 15y^2 = 9$	$(12,3)$	$x^2 - 15y^2 = -9$	–
17	$x^2 - 17y^2 = 9$	$(99,24)$	$x^2 - 17y^2 = -9$	$(12,3)$
18	$x^2 - 18y^2 = 9$	$(9,2)$	$x^2 - 18y^2 = -9$	$(3,1)$
19	$x^2 - 19y^2 = 9$	$(22,5)$	$x^2 - 19y^2 = -9$	–
20	$x^2 - 20y^2 = 9$	$(27,6)$	$x^2 - 20y^2 = -9$	–

Misal $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, dengan $x = (a_1 + b_1\sqrt{d})$, $y = (a_2 + b_2\sqrt{d})$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ dan $d \in \mathbb{Z}^+$, $d \neq {a_i}^2$ $(i = 1,2)$. Jika $y = (a_2 + b_2\sqrt{d})$ merupakan solusi dari persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = 9$ maka, $N(y) = y\bar{y} = (a_2 + b_2\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d}) = 9$. Namun untuk persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = 9$ dengan variabel (a_1, b_1) yang dapat ditulis menjadi, ${a_1}^2 - d{b_1}^2 = N(x) = (a_1 + b_1\sqrt{d})(a_1 - b_1\sqrt{d}) = 9$.

Maka agar x menjadi unit haruslah $x = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{d})}{3}$ sehingga,

$$N(x) = x\bar{x} = \left(\frac{(a_1 + b_1\sqrt{d})}{3}\right)\left(\frac{(a_1 - b_1\sqrt{d})}{3}\right) = 1 \quad (1)$$

Dengan mengalikan x dan y, sesuai hasil pada persamaan (1) menjadi,

$$\left(\frac{(a_1 + b_1\sqrt{d})}{3}\right)(a_2 + b_2\sqrt{d}) = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2d}{3}\right) + \left(\frac{a_1b_2 + a_2b_1}{3}\right)\sqrt{d}$$

Jadi dengan memisahkan bilangan bulat pada bagian rasional dan bagian irrasionalnya maka diperoleh solusi untuk persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = 9$ adalah $\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2d}{3}, \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{3}\right)$, dengan x bisa sama dengan y.

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh bahwa $\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}$ merupakan unit dari ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sehingga $N\left(\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}\right)=1$. Akibatnya karena yang dicari merupakan solusi dari persamaan *Pell* $x^2-dy^2=9$, maka dengan mengasumsikan (a_1,b_1) merupakan solusi dari persamaan *Pell* $x^2-dy^2=9$, dan karena $\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}$ merupakan unit dimana,

$$N\left(\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}\right)=\left(\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}\right)\cdot\left(\frac{(a_1-b_1\sqrt{d})}{3}\right)=\left(\frac{a_1^2-db_1^2}{9}\right)=1.$$

Sehingga, agar memenuhi persamaan *Pell* $x^2-dy^2=9$ yaitu dengan norm $N\left(\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}\right)=9$, maka,

$$\left(3\frac{(a_1+b_1\sqrt{d})}{3}\right)\cdot\left(3\frac{(a_1-b_1\sqrt{d})}{3}\right)=\left(9\frac{a_1^2-db_1^2}{9}\right)=9.1=9.$$

Jadi berdasarkan teorema 4.2.5 pada (Andresscu, 2010:165) dimana setiap solusi persamaan $x^2-dy^2=1$ dapat ditulis dengan $\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$ dan berdasarkan persamaan (1), maka setiap solusi pada persamaan $x^2-dy^2=9$ dapat ditulis dengan $\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)=\pm3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n$, untuk = 1,2 ... .

Penyelesaian Persamaan Pell $x^2-dy^2=9$

Teorema 1

Misal d bilangan bulat positif dan bukan kuadrat sempurna. Jika (x_1,y_1) adalah solusi awal dari $x^2-dy^2=9$ maka solusi umum (x_n,y_n) memenuhi,

$$\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)=\pm3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n,\ n=1,2\ldots$$

Bukti :

Dengan diketahui $x^2-dy^2=9$, misal solusi positif $x+y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah $x+y\sqrt{d}=3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n$, diperoleh,

$$\begin{aligned}x^2-dy^2&=\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right)\\&=\left(3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n\right)\left(3\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n\right)\\&=9\left(\frac{{x_1}^2-d{y_1}^2}{9}\right)^n\\&=9\left(\frac{9}{9}\right)^n\\&=9\end{aligned}$$

Dengan diketahui $x^2-dy^2=9$, misal solusi negatif $x+y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah $\left(x_n+y_n\sqrt{d}\right)=-3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n$, diperoleh,

$$\begin{aligned}x^2-dy^2&=\left(-\left(x+y\sqrt{d}\right)\right)\left(-\left(x-y\sqrt{d}\right)\right)\\&=\left(3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n\right)\left(3\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{d}}{3}\right)^n\right)\\&=9\left(\frac{{x_1}^2-d{y_1}^2}{9}\right)^n\\&=9\left(\frac{9}{9}\right)^n\end{aligned}$$

$= 9.$

Contoh 1

Carilah dua nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x^2 - 3y^2 = 9$ dengan solusi awal $x_1 = 6$ dan $y_1 = 3$!

Jawab :

Diketahui solusi awal persamaan di atas adalah $x_1 = 6$ dan $y_1 = 3$. Untuk x_2 dan y_2 maka:

$$\begin{aligned}\left(x_2 + y_2\sqrt{d}\right) &= \pm 3\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{3}\right)^2 \\ &= 3\left(\frac{6 + 3\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= (21 + 12\sqrt{3})\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $(6,3)$ adalah solusi awal dari $x^2 - 3y^2 = 9$, diperoleh solusi $(x_2, y_2) = (21, 12)$.

Berdasarkan penelitian Rafika (2014), misalkan diketahui solusi awal dari persamaan $x^2 - dy^2 = 9$ adalah (x_1, y_1), maka jika (x_1, y_1) dibentuk ke dalam matriks akan menghasilkan matriks berordo 2×1 yaitu $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, n = 1$. Untuk mencari solusi ke-n dari x_n dan y_n pada persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = 9$ berdasarkan hasil penelitian Rafika (2014) diperoleh rumus :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

dengan nilai,

$$x_n = \frac{u_n}{3^{n-1}} \text{ dan } y_n = \frac{v_n}{3^{n-1}} \tag{3}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2) dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1u_{n-1} + dy_1v_{n-1} \\ y_1u_{n-1} + x_1v_{n-1} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4}$$

Teorema 2

Jika (x_1, y_1) merupakan solusi awal dari persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = 9$, maka untuk $n \geq 2$,

$$x_n = \frac{x_1x_{n-1} + dy_1y_{n-1}}{3}, \text{ dan } y_n = \frac{y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1}}{3}$$

Bukti :

Diketahui bahwa berdasarkan persamaan (4), $u_n = x_1u_{n-1} + dy_1v_{n-1}$, $v_n = y_1u_{n-1} + x_1v_{n-1}$ dan berdasarkan persamaan (3) maka $u_n = 3^{n-1}x_n$, $v_n = 3^{n-1}y_n$. Jadi $u_{n-1} = 3^{n-2}x_{n-1}$ dan $v_{n-1} = 3^{n-2}y_{n-1}$. Akibatnya diperoleh,

$$u_n = x_1u_{n-1} + dy_1v_{n-1}$$
$$3^{n-1}x_n = x_1 3^{n-2}x_{n-1} + dy_1 3^{n-2}y_{n-1}$$

$$3^{n-1}x_n = 3^{n-2}(x_1x_{n-1} + dy_1y_{n-1})$$
$$x_n = \frac{x_1x_{n-1} + dy_1y_{n-1}}{3}$$

dan,

$$v_n = y_1u_{n-1} + x_1v_{n-1}$$
$$3^{n-1}y_n = y_1 3^{n-2}x_{n-1} + x_1 3^{n-2}y_{n-1}$$
$$3^{n-1}y_n = 3^{n-2}(y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1})$$
$$y_n = \frac{y_1x_{n-1} + x_1y_{n-1}}{3}$$

Contoh 2

Tentukan solusi kedua dengan menggunakan teorema 2 untuk persamaan *Pell* $x^2 - 8y^2 = 9$ dengan solusi awal $(x_1, y_1) = (9, 3)$!

Jawab :

Diketahui solusi awal dari persamaan $x^2 - 8y^2 = 9$ merupakan $(x_1, y_1) = (9,3)$, maka dengan menggunakan teorema 2 diperoleh solusi kedua persamaan tersebut adalah,

$$x_2 = \frac{x_1x_1 + 8 \cdot y_1y_1}{3}$$
$$= \frac{9 \cdot 9 + 8 \cdot 3 \cdot 3}{3}$$
$$= 51$$
$$y_2 = \frac{y_1x_1 + x_1y_1}{3}$$
$$= \frac{3 \cdot 9 + 9 \cdot 3}{3}$$
$$= 18$$

Jadi solusi kedua dari persamaan $x^2 - 8y^2 = 9$ merupakan $(x_2, y_2) = (51,18)$.

Penyelesaian Persamaan Pell $x^2 - dy^2 = -9$

Teorema 3

Misal d bilangan bulat positif dan bukan kuadrat sempurna. Jika (x_1, y_1) adalah solusi awal dari $x^2 - dy^2 = -9$, maka solusi umum (x_m, y_m) (untuk suatu $m = 1,2, \ldots$, dimana $n = m - 1$) berbentuk:

$$\left(x_{2n+1} + y_{2n+1}\sqrt{d}\right) = \pm 3\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}, n = 0,1, \ldots$$

Bukti :

Dengan diketahui $x^2 - dy^2 = -9$, misal solusi positif $x + y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah $\left(x + y\sqrt{d}\right) = 3\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}$ diperoleh,

$$x^2 - dy^2 = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right)$$
$$= \left(3\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)\left(3\left(\frac{x_1 - y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{{x_1}^2 - d{y_1}^2}{9}\right)^{2n+1}$$

$$= 9\left(\left(\frac{{x_1}^2 - d{y_1}^2}{9}\right)^2\right)^n \left(\frac{-9}{9}\right)$$
$$= 9\left(\left(\frac{-9}{9}\right)^2\right)^n (-1)$$
$$= -9$$

Dengan diketahui $x^2 - dy^2 = -9$, misal solusi negatif $x + y\sqrt{d}$ dari persaamaan tersebut adalah$\left(x_n + y_n\sqrt{d}\right) = -3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}$ diperoleh,

$$x^2 - dy^2 = \left(-\left(x + y\sqrt{d}\right)\right)\left(-\left(x - y\sqrt{d}\right)\right)$$
$$= \left(3\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)\left(3\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2n+1}\right)$$
$$= 9\left(\frac{{x_1}^2 - d{y_1}^2}{9}\right)^{2n+1}$$
$$= 9\left(\left(\frac{{x_1}^2 - d{y_1}^2}{9}\right)^2\right)^n \left(\frac{-9}{9}\right)$$
$$= 9\left(\left(\frac{-9}{9}\right)^2\right)^n (-1)$$
$$= -9$$

Contoh 3

Cari nilai x_2 dan y_2 yang memenuhi persamaan $x^2 - 17y^2 = -9$ dengan solusi awal $x_1 = 12$ dan $y_1 = 3$!

Jawab:

Diketahui solusi awal dari persamaan *Pell* $x^2 - 17y^2 = -9$ adalah $x_1 = 12$ dan $y_1 = 3$, selanjutnya, untuk x_2 dan y_2 maka berdasarkan teorema 3 diperoleh:

$$\left(x_{2.1+1} + y_{2.1+1}\sqrt{d}\right) = \pm 3\left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{3}\right)^{2.1+1}$$
$$= 3\left(\frac{12 + 3\sqrt{17}}{3}\right)^3$$
$$= \left(804 + 195\sqrt{17}\right)$$

Diperoleh $x_m = x_2 = 804$ dan $y_m = y_2 = 195$. Dari contoh 3 di atas, maka dapat disimpulkan bahwa nilai (x_m, y_m) yang memenuhi persamaan $x^2 - 17y^2 = -9$ berturut-turut $(12, 3)$ dan $(804, 195)$.

Berdasarkan penelitian Rafika (2014), misalkan x_1 dan y_1 adalah solusi awal, maka untuk persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = -9$ diperoleh solusi,

$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dengan nilai

$$x_{2n+1} = \frac{u_{2n+1}}{3^{2n}} \text{ dan } y_{2n+1} = \frac{v_{2n+1}}{3^{2n}}. \quad (6)$$

Perhatikan bahwa persamaan (6) dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2} \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{2} \begin{pmatrix} u_{2n-1} \\ v_{2n-1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_{2n+1} \\ v_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({x_1}^2 + d{y_1}^2)u_{2n-1} + 2dx_1y_1v_{2n-1} \\ 2x_1y_1u_{2n-1} + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)v_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Teorema 4

Misal persaman *Pell* $x^2 - dy^2 = -9$ mempunyai solusi di bilangan bulat positif dan misal (x_1, y_1) merupakan solusi awalnya. Solusi umum pada persamaan $x^2 - dy^2 = -9$ diberikan oleh (x'_m, y'_m) (untuk suatu $m = 1,2, \ldots, n = 1,2 \ldots$, dimana $n = m - 1$) dimana,

$$x_{2n+1} = \frac{({x_1}^2 + d{y_1}^2)x_{2n-1} + 2dx_1y_1y_{2n-1}}{9}, \text{ dan } y_{2n+1} = \frac{2x_1y_1x_{2n-1} + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)y_{2n-1}}{9}$$

Bukti :

Diketahui bahwa $u_{2n+1} = 3^{2n}x_{2n+1}$, $v_n = 3^{2n}v_{2n+1}$. Sehingga $u_{2n-1} = 3^{2n-2}x_{2n-1}$ dan $v_{2n-1} = 3^{2n-2}y_{2n-1}$. Dari persamaan (6) dan (7) diperoleh,

$$u_{2n+1} = ({x_1}^2 + d{y_1}^2)u_{2n-1} + 2dx_1y_1v_{2n-1}$$
$$3^{2n}x_{2n+1} = ({x_1}^2 + d{y_1}^2)(3^{2n-2}x_{2n-1}) + 2dx_1y_1(3^{2n-2}y_{2n-1})$$
$$3^{2n}x_{2n+1} = 3^{2n-2}[({x_1}^2 + d{y_1}^2)x_{2n-1} + 2dx_1y_1y_{2n-1}]$$
$$x_{2n+1} = \frac{({x_1}^2 + d{y_1}^2)x_{2n-1} + 2dx_1y_1y_{2n-1}}{9}$$

dan,

$$v_{2n+1} = 2x_1y_1u_{2n-1} + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)v_{2n-1}$$
$$3^{2n}y_{2n+1} = 2x_1y_1(3^{2n-2}x_{2n-1}) + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)(3^{2n-2}y_{2n-1})$$
$$3^{2n}y_{2n+1} = 3^{2n-2}[2x_1y_1x_{2n-1} + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)y_{2n-1}]$$
$$y_{2n+1} = \frac{2x_1y_1x_{2n-1} + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)y_{2n-1}}{9}$$

Contoh 4

Carilah solusi dari persamaan *Pell* $x^2 - 5y^2 = -9$ dengan solusi awal $(x_1, y_1) = (6,3)$ dengan menggunakan teorema di atas !

Jawab :

Diketahui solusi awal dari persamaan $x^2 - 5y^2 = -9$ merupakan $(x_1, y_1) = (6,3)$, maka dengan menggunakan teorema di atas diperoleh solusi dari persamaan tersebut adalah,

$$x_{2.1+1} = \frac{({x_1}^2 + d{y_1}^2)x_1 + 2dx_1y_1y_1}{9}$$
$$= \frac{(6^2 + 5 \cdot 3^2)6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3}{9}$$
$$= 114$$
$$y_{2.1+1} = \frac{2x_1y_1x_1 + ({x_1}^2 + d{y_1}^2)y_1}{9}$$
$$= \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 + (6^2 + 5 \cdot 3^2)3}{9}$$
$$= 51$$

Jadi solusi kedua dari persamaan $x^2 - 5y^2 = -9$ merupakan $(x'_m, y'_m) = (x'_2, y'_2) = (114,51)$.

Kriteria Persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = -9$ yang Memiliki Solusi

Teorema 5

Misal d merupakan bilangan prima dimana $d \equiv 1(\text{mod } 4)$. Persamaan

$$x^2 - dy^2 = -9 \tag{8}$$

Memiliki solusi jika dan hanya jika persamaan $x^2 - dy^2 = 9$ memiliki solusi.

Bukti :

Diketahui d merupakan bilangan prima dimana $d \equiv 1(\text{mod } 4)$. Misal persamaan (8) memiliki solusi, sehingga terdapat $r, s \in \mathbb{Z}$ dan memenuhi $r^2 - ds^2 = -9$. Akan dibuktikan persamaan $x^2 - dy^2 = 9$ juga memiliki solusi. Berdasarkan teorema 2.23 pada (Smith, 2009:38) dimana misal d bilangan prima, maka persamaan *Pell* negatif $x^2 - dy^2 = -1$ mempunyai solusi di bilangan bulat positif jika dan hanya jika $d \equiv 1 \text{ (mod } 4)$. Sehingga dengan $d \equiv 1(\text{mod } 4)$, persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ memiliki solusi maka terdapat $u, v \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan tersebut. Dan dengan menggunakan prinsip perluasan perkalian pada (Andresscu, 2015:68) maka,

$$(ur \pm dvs)^2 - d(us \pm vr)^2 = (-9)(-1)$$
$$(ur \pm dvs)^2 - d(us \pm vr)^2 = 9$$

Misal $p = (ur \pm dvs)$ dan $q = (us \pm vr)$, ini berarti terdapat $p, q \in \mathbb{Z}$ yang merupakan solusi dari persamaan $x^2 - dy^2 = 9$. Untuk membuktikan sebaliknya, diketahui d merupakan bilangan prima dimana $d \equiv 1(\text{mod } 4)$. Misal persamaan $x^2 - dy^2 = 9$ memiliki solusi, sehingga terdapat $a, b \in \mathbb{Z}$ dan memenuhi persamaan tersebut. Akan dibuktikan persamaan $x^2 - dy^2 = -9$ juga memiliki solusi. Dengan menggunakan teorema 2.23 pada (Smith, 2009:38) maka persamaan $x^2 - dy^2 = -1$ memiliki solusi maka terdapat $u, v \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi persamaan tersebut. Sehingga dengan menggunakan prinsip perluasan perkalian pada (Andresscu, 2015:68) maka,

$$(ua \pm dvb)^2 - d(ua \pm vb)^2 = (9)(-1)$$
$$(ua \pm dvb)^2 - d(ua \pm vb)^2 = -9$$

Misal $c = (ua \pm dvb)$ dan $d = (ua \pm vb)$, ini berarti terdapat $c, d \in \mathbb{Z}$ yang merupakan solusi dari persamaan $x^2 - dy^2 = -9$.

KESIMPULAN

Dalam menyelesaikan persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = \pm 9$ dengan menggunakan metode ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ memiliki langkah yang lebih singkat, yaitu dengan mencari solusi awalnya terlebih dahulu, kemudian diselesaikan dengan menggunakan teorema-teorema yang berkaitan dengan konsep norm pada ring $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Pada penelitian ini diberikan empat teorema untuk menyelesaikan persamaan *Pell* dan diberikan contoh dalam menyelesaikan persamaan *Pell* dengan menggunakan ke-empat teorema tersebut. Diperoleh pula bahwa, solusi persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = 9$ paling tidak memiliki satu solusi, sedangkan persamaan *Pell* $x^2 - dy^2 = -9$ tidak selalu memiliki solusi, hanya pada nilai d tertentu persamaan *Pell* negatif memiliki solusi.

Penelitian ini dapat dikembangkan, yaitu dengan menggunakan persamaan *Pell* dengan nilai *N* yang berbeda atau dengan menggunakan persamaan *Diophantine* lainnya. Dapat pula diselesaikan persamaan *Pell* dengan menggunakan metode lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I. (2010). *An Introduction to Diophantine Equation*. London: Birkhauser.

Andreescu, T., Andrica, D. (2015). *Quadratic Diophantine Equation*. New York: Springer.

Asha, N. (2014). Enforced Cinviction in Cryptographic Provenance Across Critical System Information. *International Journal of Computer Science and Information Technologies, Vol. 5(3), 2014, 3491-3493*. http://ijcsit.com/docs/Volume%205/vol5issue03/ijcsit20140503185.pdf. diakses pada tanggal 5 September 2018.

Clark, P.L. (2009). *The Pell Equation*. University Of Georgia, Georgia. http://math.uga.edu/~pete/4400pell notes.pdf. diakses pada tanggal 28 November 2017.

Dewi, K.S. (2016). *Konsep Keterbagian Pada Ideal Dalam Ring* $\mathbb{Z}[i]$ *dan Aplikasinya Untuk Penyelesaian Persamaan Diophantine Non Linear*. Universitas Lampung, Bandar Lampung.

Kline, D. (2014). *The Structure Of Unit Groups*. The University Of Chicago, Chicago http://math.uchicago.edu/ ~may/REU2014/ REUPapers/Kline.pdf. diakses pada tanggal 28 November 2017.

Mollin, R.A. (2010). A Note on the Negative *Pell* Equation. *International Journal of Algebra, Vol. 4, 2010, no. 19, 919-922.*

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. (1991). *Introduction to The Theory Number*. New York: John Wiley Addison

Rafika. (2012). *Penyelesaian Persamaan Pell Dengan Menggunakan Metode Pecahan Berulang dan Metode Matriks*. Universitas Negeri Makassar, Makassar.

Robertson, J. P. (2004). *Solving The Generalized Pell Equation* $x^2 - dy^2 = N$. http://www.jpr2718.org/*Pell*.pdf. diakses pada tanggal 28 November 2018.

Smith, J. (2009). *Solvability Characterizations of Pell Like Equations.* Boise State University, Boise.

Tekcan, A. (2007). The *Pell* Equation $x^2 - dy^2 = \pm 4$. *Applied Mathematical Sciences, Vol. 1, 2007, no. 8, 363-369.* http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password5-8-2007/tekcanAMS5-8-2007.pdf. diakses pada tanggal 28 November 2017.