**WEAKLY CONTRACTIVE MAPPING**

**IN PARTIAL METRIC SPACE**

Fakultas MIPA, Universitas PGRI Palembang

Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas PGRI Palembang

Sagita.Charolina@yahoo.com

**ABSTRACT**

Contractive mapping is one kind of mapping that guarantees a fixed point in a metric space Many experts has developed this kind of mapping to show the existence of a fixed point such as Kannan mapping and Chatterjea Contractive mapping. In this study, we will show the weakly contractive mapping to show the existence of fixed point in the partial metric space

**Keywords:** Metric Partial Space, Fixed Point, Weakly Contractive Mapping

**PENDAHULUAN**

Teorema yang memenuhi kondisi pemetaan kontraktif disebut juga sebagai teorema titik tetap Banach. Teorema titik tetap Banach memberikan suatu syarat cukup untuk eksistensi titik tetap dari suatu pemetaan yang didefinisikan pada ruang metrik. Pemetaan kontraktif telah dikembangkan oleh beberapa ahli di ruang metrik .

Matthews (1992) dalam Bukatin, *et al* (2009) memperkenalkan **ruang metrik parsial** sebagai pengembangan dari sebuah ruang metrik. Pengembangan ini didasari oleh permasalahan yang ditemukan dalam ilmu komputer dimana dua barisan tak hingga yang sama belum tentu memiliki jarak nol. Program komputer tidak dapat memproses barisan tak hingga dalam waktu yang terbatas. Oleh karena itu, barisan dibentuk dalam masing-masing bagian, yakni dan seterusnya. Setelah setiap nilai diproses maka dibentuk barisan berhingga sebagai perwakilan barisan tak hingga yang telah dibentuk sebelumnya. Akan tetapi, jarak dari barisan berhingga dan yang mewakili barisan tak hingga tersebut adalah , dengan sehingga , untuk setiap . Jadi, dua barisan tak hingga yang sama belum tentu memiliki jarak nol, sebab suku-suku barisan bisa sama jika terdefinisi. Hal ini berbeda dengan sifat ruang metrik yang mensyaratkan jarak untuk dua barisan yang samaadalah nol. Permasalahan tersebut melatarbelakangi pengembangan konsep metrik, dengan menambahkan sifat jarak suatu titik dengan dirinya sendiri tidak harus bernilai nol, yang kemudian lebih dikenal dengan metrik parsial.

Dari uraian tersebut di atas menarik untuk dikaji tentang eksistensi titik tetap pada pemetaan di ruang metrik parsial dengan sifat pemetaan kontraktif lemah untuk dua pemetaan. Sebelum dibahas hasil penelitian ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang akan mendukung pembahasan ini.

Pada bagian ini dijelaskan mengenai konsep dasar tentang pemetaan *single valued* yang mendukung pembahasan titik tetap pada pemetaan *multivalued* di ruang metrik parsial.

# Ruang Metrik

**Definisi 2.1.1** Misalkan adalah sebuah himpunan yang tak kosong. Suatu fungsi disebut metrik pada jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. untuk setiap

2. jika dan hanya jika

3. untuk setiap

4.  untuk setiap

Himpunan bersama dengan metrik disebut **ruang metrik** dan ditulis .

(Shirali, *et al*, 2006)

**Definisi 2.1.2** Misalkan adalah sebuah ruang metrik. Suatu barisan dari titik-titik di adalah suatu fungsi sehingga untuk setiap ,. Suku-suku di merupakan barisan titik di dan dinotasikan dengan .

(Shirali, *et al*, 2006)

**Definisi 2.1.3** Barisan dalam ruang metrik dikatakan barisan Cauchy jika

 (2.1)

(Shirali & Vasudeva, 2006)

**Definisi 2.1.4** Barisan dalam ruang metrik dikatakan konvergen ke jika

 (2.2)

ditulis dan disebut sebagai limit dari barisan , .

 (Gelutu, 2006)

**Contoh 2.1**

Misalkan dengan metrik Maka barisan yang didefinisikan oleh untuk di dalam ruang metrik konvergen ke .

**Bukti.**

Ambil sebarang , maka menurut *archimedian property* terdapat sedemikian sehingga . Oleh karena itu, jika maka . Sehingga untuk setiap berlaku

 (2.3)

Ini menunjukkan bahwa barisan konvergen di .

**Teorema 2.1.5** Setiap barisan yang konvergen dalam ruang metrik merupakan barisan Cauchy. (Shirali, *et al*, 2006)

Secara umum, sifat sebaliknya tidak berlaku; setiap barisan Cauchy belum tentu konvergen.

**Contoh 2.2**

Himpunan dengan metrik dan barisan dengan untuk di dalam ruang metrik . Barisan adalah barisan Cauchy tapi tidak konvergen di .

**Definisi 2.1.6** Suatu ruang metrik dikatakan **lengkap** jika setiap barisan Cauchy di dalam adalah konvergen. (Shirali, *et al*, 2006).

**Proposisi 2.1.7** Misalkan adalah suatu **ruang metrik lengkap** dan . Maka:

1. Jika himpunan bagian tertutup di , maka adalah subruang metrik lengkap dari .
2. Jika adalah subruang metrik lengkap, maka adalah tertutup di .

(Gelutu, 2006)

**Teorema 2.1.8** Misalkan adalah suatu ruang metrik. Maka fungsi adalah kontinu. (Gelutu, 2006)

**Bukti.**

Misalkan dan misalkan . Akan ditunjukkan bahwa adalah kontinu pada . Diberikan sebarang misalkan adalah lingkungan dari .

Maka untuk sebarang , didapat

 (2.4)

Secara similar,

  (2.5)

Dari (2.4) dan (2.4) didapat bahwa sehingga . Karena adalah sebarang, ini menunjukkan bahwa adalah kontinu pada ).

**Teorema 2.1.9** Suatu pemetaan dari ruang metrik ke ruang metrik adalah kontinu di titik jika dan hanya jika

 maka (2.6)

(Agarwal, *et al*, 2009)

**Definisi 2.1.10** Diberikan ruang metrik . Suatu titik disebut **titik tetap** dari pemetaan jika

(2.7)

(Istrescu, 1981 *dalam* Chi-Ming Chen, 2011)

**Contoh 2.3**

Fungsi dengan , untuk setiap . Maka mempunyai dua titik tetap yaitu dan .

# Sifat Pemetaan Kontraktif pada Ruang Metrik

Berikut ini diberikan definisi pemetaan kontraktif di ruang metrik

**Definisi 2.2.1** Diberikan ruang metrik . Pemetaan dikatakan bersifat **kontraktif** pada jika terdapat bilangan riil , sedemikian sehingga berlaku

 (2.8)

untuk setiap . (Istrescu, 1981 *dalam* Chi-Ming Chen, 2011)

**Lemma 2.2.2** Suatu pemetaan kontraktif di suatu ruang metrik adalah **pemetaan kontinu**. (Agarwal, *et al*, 2009)

**Bukti.**

Misalkan . Ambil sebarang , pilih sehingga untuk setiap berlaku:

 (2.9)

Karena sebarang anggota di , maka pemetaan kontinu di .

Teorema yang memenuhi kondisi pemetaan kontraktif disebut juga sebagai teorema titik tetap Banach. Teorema titik tetap Banach memberikan suatu syarat cukup untuk eksistensi titik tetap dari suatu pemetaan yang didefinisikan pada ruang metrik. Persisnya, teorema tersebut berbunyi sebagai berikut.

**Teorema 2.2.3** Misalkan adalah sebuah **ruang metrik** **lengkap** dan misalkan adalah sebuah pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif. Maka mempunyai titik tetap. (Istrescu, 1981 *dalam* Chi-Ming Chen, 2011)

**Bukti.**

Diketahui bahwa kontinu (secara seragam): untuk setiap terdapat sedemikian sehingga jika , maka . Selanjutnya, ambil titik sembarang, lalu definisikan

*xn* = (*xn*–1),    *n* = 1, 2, 3, … .

Berdasarkan hipotesis, kita mempunyai

*d*(*x*2, *x*1) = *d*((*x*1), (*x*0)) ≤ *K* *d*(*x*1, *x*0);

*d*(*x*3, *x*2) = *d*((*x*2), (*x*1)) ≤ *K* *d*(*x*2, *x*1) ≤ *K*2 *d*(*x*1, *x*0)

dan secara umum *d*(*xn*+1, *xn*) ≤ *Kn d*(*x*1, *x*0) untuk setiap *n* = 1, 2, 3, … .

Berikut ini akan ditunjukkan untuk *m* > *n*,

*d*(*xm*, *xn*) ≤ *d*(*xm*, *xm*–1) + … + *d*(*xn*+1, *xn*) ≤ [*Km*–1 + … + *Kn*] *d*(*x*1, *x*0).

Di sini *Km*–1 + … + *Kn* ≤ *Kn*(1 + *K* + *K*2 + *K*3 + …) = *Kn*/(1 – *K*) → 0 bila *n* → ∞ dan *d*(*x*1, *x*0) merupakan suatu konstanta. Jadi, barisan *x*0, *x*1, *x*2, *x*3, … merupakan **barisan Cauchy** di X. Karena (X, *d*) merupakan ruang metrik lengkap, barisan ini konvergen, katakanlah ke suatu titik *c* ϵ X. Mengingat kontinu, kita mempunyai

Tetapi, pada saat yang sama, kita juga mempunyai lim (*xn*) = lim *xn*+1 = *c*. Jadi kita peroleh (*c*) = *c*. Dalam perkataan lain, *c* merupakan titik tetap .



**Gambar 1.** Ilustrasi grafis untuk akar hampiran

Selanjutnya jika *b* juga merupakan titik tetap , maka *d*(*b*, *c*) = *d*((*b*), (*c*)) ≤ *K* *d*(*b*, *c*). Karena 0 < *K* < 1, kita simpulkan bahwa *d*(*b*, *c*) = 0, yang berarti *b* = *c*. Jadi titik tetap mestilah tunggal.

**Contoh 2.4**

Misalkan Pemetaan dengan adalah pemetaan kontraktif dengan metrik yang didefinisikan oleh .

**Bukti.**

Dengan menggunakan kondisi kontraktif seperti pada (2.8), maka:

Ini menunjukkan bawah adalah pemetaan kontraktif.

**METODE PENELITIAN**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Pembahasan pada penelitian dilakukan dengan terlebih dahulu mengkaji ruang metrik parsial dan sifat-sifatnya. Selanjutnya dipelajari sifat pemetaan kontraktif untuk pemetaan pada ruang metrik parsial. Konsep suatu pemetaan ruang metrik parsial dikembangkan untuk pemetaan kontraktif lemahdi ruang metrik parsial. Jadi, akan dikaji syarat cukup agar pemetaan kontraktif lemah di ruang metrik parsial mempunyai titik tetap.

**HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN**

# 4.1 Sifat-Sifat Ruang Metrik Parsial

 Berikut ini akan dijabarkan sifat-sifat ruang metrik parsial.

**Definisi 4.1.1** Misalkan adalah sebuah himpunan yang tak kosong. Suatu fungsi disebut sebagai metrik parsial pada jika untuk sebarang , kondisi berikut terpenuhi:

(p1).

(p2). jika dan hanya jika

(p3).

(p4).

Himpunan bersama dengan metrik parsial disebut **ruang metrik parsial** dan ditulis . (Gangopadhyay, *et al*, 2013)

**Contoh 4.1**

 : Himpunan bilangan riil positif.

Fungsi yang didefinisikan oleh adalah metrik pada , sehingga adalah ruang metrik parsial.

**Bukti.**

1. Akan ditunjukkan untuk setiap .

Ambil , maka:

 Jadi, untuk setiap .

1. Akan ditunjukkan jika maka .

Ambil ,

 (4.1)

 (4.2)

Dari (1) dan (2) didapat bahwa

1. Akan ditunjukkan untuk setiap

Ambil , maka:

Jadi, untuk setiap

1. Akan ditunjukkan   untuk setiap

Ambil , maka:

Sehingga dapat ditulis:

Jadi,  untuk setiap

Dari 1, 2, 3, dan 4 terbukti bahwa adalah ruang metrik parsial.

U. Kadak, et al, 2013, pada jurnalnya mengatakan bahwa suatu ruang metrik parsial adalah perluasan dari suatu ruang metrik. Berikut ini diberikan Lemma yang menjelaskan hubungan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial .

**Lemma 4.1.5** Misalkan adalah suatu ruang metrik parsial, dan fungsi didefinisikan oleh

maka adalah sebuah metrik.

(U. Kadak, F. Basar and H. Efe, 2013)

**Bukti:**

1. Jelas, bahwa maka.
2. Dari (p2) didapat

1. Jelas, bahwa untuk semua ,
2. Untuk semua dan dari (p4), didapat

Dari keempat bukti di atas didapat bahwa adalah sebuah metrik.

Lemma berikut ini menjelaskan hubungan barisan di ruang metrik dengan ruang metrik parsial .

**Lemma 4.1.6** Misalkan adalah sebuah ruang metrik parsial.

* 1. adalah barisan Cauchy di jika dan hanya jika barisan tersebut adalah barisan Cauchy di .
	2. adalah lengkap jika dan hanya jika adalah lengkap.

(M. Kir and H. Kiziltunc, 2016)

**Bukti.**

1. Diketahui bahwa adalah barisan cauchy di , akan ditunjukkan bahwa juga merupakan barisan cauchy di

Berdasarkan Definisi 2.1.4, barisan dikatakan konvergen di ,

1. 1. **Pemetaan pada Ruang Metrik Parsial**
		1. **Pemetaan *Single Valued* pada Ruang Metrik Parsial**

**Teorema 4.3.1 (Matthew).** Misalkan adalah ruang metrik parsial lengkap dan diberikan suatu pemetaan . Jika dan ,

Maka, mempunyai titik tetap tunggal.

**Teorema 4.3.2** Misalkan adalah suatu ruang metrik parsial lengkap dan andaikan adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga

 (4.11)

Untuk semua dimana adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga untuk setiap Maka mempunyai titik tetap tunggal.

* + 1. Altun et al, 2010)

**Bukti**. Dari kondisi pada , jelaslah bahwa untuk Misalkan adalah sebarang titik. Didefinisikan sebuah barisan di oleh untuk Andaikan untuk maka jelas bahwa adalah suatu titik tetap dari Sekarang asumsikan untuk semua

Maka dari (4.11) didapat:

 (4.12)

karena

dan adalah tak menurun. Sekarang jika

Untuk beberapa maka dari (2.2) didapat:

yang mana kontradiksi karena Sehingga

Untuk semua Maka dari (4.12) didapat

dan oleh karena itu

 (4.13)

Dengan kata lain, karena

maka dari (4.13) didapat

 (4.14)

Oleh karena,

Ini menunjukkan bahwa Sekarang kita mempunyai

Ini menunjukkan bahwa adalah barisan Cauchy pada ruang metrik Karena adalah lengkap maka berdasarkan Lemma 4.1.6, adalah lengkap dan juga barisan konvergen pada ruang metrik ditulis Juga dari Lemma 4.1.6, didapat

 (4.15)

Lebih jauh karena adalah barisan Cauchy pada ruang metrik kita mempunyai dan dari (4.14) kita mempunyai sehingga dari definisi kita mempunyai Oleh karena itu dari (4.15) didapat

Sekarang akan ditunjukkan bahwa Asumsikan ini tidak benar, maka dari (4.11) didapat

menggunakan kontinuitas dari dan misalkan didapat

hal ini merupakan kontradiksi. Oleh karena itu dan juga Sekarang misalkan adalah titik tetap lain dari dengan maka dari (4.11) karena didapat

dimana hal ini merupakan kontradiksi. Sehingga

Berikut ini diberikan contoh bahwa kondisi pada Teorema 4.3.2 (kontraktif lemah) terpenuhi tetapi kondisi kontraktif Matthew tidak terpenuhi.

**Contoh 4.2**

Misalkan dan jelaslah bahwa adalah ruang metrik parsial lengkap. Misalkan untuk semua dan Maka untuk semua dengan didapat

Hal ini menunjukkan bahwa kondisi dari Teorema Akibat 4.3.2 terpenuhi dan juga mempunyai titik tetap di Tetapi Teorema Matthew tiak dapat diterapkan untuk contoh ini, karena tidak terdapat sedemikian sehingga

Selanjutnya dikaji teorema untuk dua pemetaan di ruang metrik parsial

**Teorema Akibat 4.3.3 (Penelitian 1)** Misalkan adalah suatu ruang metrik parsial lengkap, dan misal terdapat dua pemetaan yang memenuhi syarat berikut:

 (4.16)

Untuk semua dimana adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga untuk setiap Maka pemetaan tersebut mempunyai titik tetap yang sama.

**Bukti.**

Misalkan Didefinisikan barisan sehingga dan , secara induksi dibentuk:

 (4.17)

Jika terdapat suatu bilangan bulat positif sedemikian sehingga maka adalah titik tetap dari dan mengakibatkan titik tetap juga dari Tentu saja, karena maka

 (4.18)

Juga, dari (4.16) didapat

 (4.19)

 (4.20)

Sehingga persamaan (4.20) menjadi:

 (4.21)

Pertidaksamaan (4.21) mengakibatkan Karena maka yang mengakibatkan Perhatikan bahwa adalah titik tetap dari Sebagai hasilnya, adalah titik tetap bersama dari dan Kesimpulan yang sama terjamin jika untuk beberapa bilangan bulat positif Oleh karena itu, kita dapat mengasumsikan untuk semua

**Jika ganjil**, berdasarkan (4.16) didapat

 (4.22)

dari sifat metrik parsial bagian (iv), didapat

 (4.23)

Sehingga pertidaksamaan (4.22) menjadi

 (4.23)

Jika  maka karena ketidaksamaan (4.22) mengakibatkan kontradiksi. Oleh karena itu,

 dan oleh (4.22) kita mempunyai

 (4.24)

**Jika genap**, pertidaksamaan (4.24) dapat diperoleh secara analog.

Kita mendapat bahwa tak negatif, barisan bilangan riil tak menaik. Dengan memperhatikan (4.24), dapat diteliti bahwa

 (4.26)

Perhatikan bahwa

 (4.27)

Sehingga, dengan memperhatikan (4.27), kita mempunyai Lebih jauh,

 (4.28)

Dengan perhitungan sederhana, didapat bahwa adalah barisan Cauchy di yaitu pada saat Karena adalah lengkap, oleh Lemma 4.1.6, adalah lengkap dan barisan konvergen di terhadap, sebut

Juga, oleh Lemma 4.1.6,

 (4.29)

Karena adalah barisan Cauchy di didapat Kita dapat menyatakan bahwa Tanpa mengurangi sifat keumuman, asumsikan bahwa Sekarang dapat ditulis:

 (4.30)

Secara analog,

 (4.31)

Dengan mengambil (4.30), pertidaksamaan (4.31) menjadi

 (4.32)

Secara induktif, didapat

 (4.33)

Berdasarkan (4.16), pertidaksamaan (4.33) menjadi

 (4.34)

dengan perhitungan sederhana, didapat

 (4.35)

Oleh karena itu, dari (4.29), didapat

 (4.36)

Dapat dinyatakan bahwa .

Selanjutnya akan ditunjuukan bahwa dan mempunyai titik tetap yang sama. Secara kontradiksi, asumsikan Maka Misalkan adalah sub barisan dari yang merupakan sub barisan dari Berdasarkan (4.16), didapat

 (4.37)

Misalkan dan mengambil persamaan (4.36), pertidaksamaan (4.37) mengakibatkan

 (4.38)

Sehingga,

 (4.39)

Berdasarkan sifat kita dapat sehingga Secara analog, jika kita memilih barisan dari didapat Sehingga

**SIMPULAN DAN SARAN**

**Simpulan**

1. Berikut ini diberikan sifat metrik parsial:

Suatu fungsi disebut sebagai metrik parsial pada jika untuk sebarang , kondisi berikut terpenuhi:

(p1).

(p2). jika dan hanya jika

(p3).

(p4).

Himpunan bersama dengan metrik parsial disebut **ruang metrik parsial** dan ditulis .

1. Syarat cukup agar pemetaan di ruang metrik parsial mempunyai titik tetap adalah terpenuhinya kondisi pemetaan kontraktif pada Ruang Metrik Parsial lengkap. Selain itu, diketahui juga sifat pemetaan kontraktif lemah yang menjamin eksistensi titik tetap jika syarat berikut terpenuhi:
2. Jarak antar himpunan dilakukan terhadap himpunan bagian yang tertutup dan terbatas dari himpunan . Perhitungan jarak tersebut dapat dilakukan dengan konsep metrik Hausdorff.
3. Untuk suatu pemetaan *multivalued* adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga

 Untuk semua dimana adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga untuk setiap

1. Untukpemetaan *multivalued* yang memenuhi syarat berikut:

 Untuk semua dimana adalah kontinu, fungsi tak menurun sedemikian sehingga untuk setiap

**Saran**

Disarankan untuk melakukan penelitian mengenai aplikasi titik tetap di ruang metrik parsial pada bidang matematika terapan atau bidang komputer sehingga dapat diperoleh informasi yang lebih luas tentang penerapan titik tetap.

**DAFTAR PUSTAKA**

Aydi, H., Abbas, M., and Vetro, C. 2012. *Partial Hausdorff Metric and Nadler’s Fixed Point Theorem on Partial Metric Spaces.* Topology and its Applications, Vol. 159, No. 14, pp. 3234-3242.

Aydi, H., Karapinar, E., and Rezapour, S. 2012. *A Generalized Meir-Keeler-Type Contraction on Partial Metric Space.* Hindawi Publishing Corporation, Volume 2012, 10 pages.

Bukatin, M., and Matthews, S. *Partial Metric Space*. Publ. Int. Math, 708-718, 2009. doi:10.4169/193009709X460831.

Chi-Ming Chen. 2011. *Some New Fixed Point Theorems for Set-Valued Contraction in Complete Metric Space*. Article: Department of Applied Mathematics. National Hsinchu University of Education, Taiwan.

Gangopadhyay, M., Saha, M., and Baisnab, A.P. 2013. *Some Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces.* TWMS Journal. App. Eng. Math. V.3, N.2, pp. 206-213.

Masiha, H.P., Sabetghadam, F., Shahzad, N. 2013. *Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces with an Application*, Faculty of Science and Mathematics, University of Nis, Serbia.

Shirali, S, and Vasudeva, H.L 2006. *Metric Space*. Springer.

Suzuki, T. 2008. *A Generalized Banach Contraction Principle That Characteries Metric Completeness*. Proceedings of The American Mathematical Society. V.136, N.5, pp. 1861-1869.